Механика деформированного твердого тела

Научная статья
УДК 539.376
http://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-4/3-12

Э.В. Сёмка

СЁМКА ЭЛЕОНОРА ВИКТОРОВНА – к.ф-м.н., преподаватель кафедры радиоэлектроники Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил, semka_elya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-0194-6979
Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
Воронеж, Россия

Качественный и количественный анализ упругопластического состояния вращающегося тонкого диска

Аннотация. Рассмотрена задача о вращающемся диске с неизменной малой толщиной, находящемся под действием равномерно распределенного давления по его контуру. Полные деформации равны сложению упругих и пластических, так как деформации достаточно малы. Пластические деформации и напряжения взаимосвязаны законом пластического течения. Рассматривается пластически несжимаемое изотропное тело. Выполняется условие непрерывности функции пластичности. Векторы напряжений и перемещений непрерывны на границе раздела упругих и пластических зон. При определении пластических зон в зависимости от внешних параметров рассмотрены все возможные режимы условия пластичности максимального касательного напряжения. Представлены аналитические выражения для внешних параметров, при которых происходит зарождение пластических зон. Графики годографа напряжений, представленные в работе, дают наглядное представление развития пластических зон.
Ключевые слова: упругопластическое тело, плоское напряженное состояние, теория пластического течения, ассоциированный закон пластического течения, годограф вектора напряжений

Для цитирования: Сёмка Э.В. Качественный и количественный анализ упругопластического состояния вращающегося тонкого диска // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2022. № 4(53). С. 3–12.

Введение

Определение напряжений во вращающихся дисках актуально, так как они используются в турбинах, генераторах, ротационных плугах, ротационных культиваторах и других технических устройствах. Работы по исследованию быстровращающихся дисков в простейшей постановке задачи были выполнены авторами [11, 16, 17].

Для правильного построения технологических процессов интересна оценка нагрузки на инструмент, оборудование, при которой объект остается пригодным к использованию. Границы значения внешних параметров для модели идеального жесткопластического тела при условии пластичности максимального касательного напряжения определяются авторами работ [1, 15]. В рамках механики сплошных тел рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии в быстровращающемся диске постоянной толщины для условия пластичности Мизеса [3, 4, 14]. Для анализа распределения упругих/пластических напряжений и деформаций внутри вращающихся кольцевых дисков, изготовленных из идеально пластичного материала, в условиях плоского напряжения используется критерий пластичности Мизеса в сочетании со связанной с ней теорией пластичности [16]. Рассматриваются задачи расчета плоских температурных напряжений в условиях пластического течения максимальных приведенных

© Сёмка Э.В., 2022.
Статья поступила: 17.11.2022; рецензирование: 01.12.2022.

напряжений (критерий Ишлинского–Ивлева) [2, 7, 9]. Изучается процесс производства необратимых деформаций во вращающемся цилиндре, изготовленном из материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами, где в качестве пластического потенциала принимаем обобщенный потенциал Мизеса [8]. Также представлено исследование ползучести однородного вращающегося цилиндра с помощью кусочно-линейного степенного потенциала [10]. Другие работы связаны с использованием условия постоянства максимально касательного напряжения [12, 13, 15, 17, 18].

Обзор научных изданий, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния вращающегося диска, показывает, что в большинстве работ определение напряжений и деформаций проводилось, когда давление на внешнем контуре диска отсутствовало [1, 3,4, 13–15, 17, 18]. В настоящей статье с учетом условия пластичности максимального касательного напряжения определяется зависимость материальных параметров и параметров внешних воздействий, когда исследуемый объект находится в определенном состоянии.

Формулировка задачи

Разбирается осесимметричная задача о вращающемся диске с неизменной малой толщиной. Выбирается цилиндрическая система координат ρ, θ, z. В центре диска выполняется симметрия поля напряжений $\sigma_\rho |_{\rho=0} = \sigma_\theta |_{\rho=0}$. Напряжения в точках, находящихся на оси $0z$, нет, то есть $\sigma_z = 0$. На контур диска $\rho = b$ действует равномерно распределенное давление $\sigma_\rho |_{\rho=b} = -p_b$.

Необходимо определить материальные и внешние параметры, при которых исследуемый объект переходит в пластическое состояние при определенных режимах условия пластичности Треска–Сен-Венана.

Основные математические соотношения

В цилиндрической системе координат ρ, θ, z, с учетом постановки задачи, запишем уравнение равновесия [11]:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + m\rho = 0, \tag{1}$$

где $m = \tau b^2 \omega^2 / kg$ – параметр инерционного воздействия, ω – скорость вращения, τ – удельный вес, g – ускорение, возникающее в результате действия силы тяжести.

Выражения для упругих деформаций ε_ρ^e, ε_θ^e, ε_z^e по направлению главных напряжений σ_ρ, σ_θ, σ_z:

$$\varepsilon_\rho^e = \frac{1}{E}\left(\sigma_\rho - \nu\sigma_\theta\right), \quad \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho\right), \quad \varepsilon_z^e = \frac{-\nu}{E}(\sigma_\rho + \sigma_\theta), \tag{2}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Выражение, определяющее связь пластических деформаций с условием текучести [6]:

$$\frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{d\varepsilon_z^p}{(\partial f / \partial \sigma_z)|_{\sigma_z=0}}, \quad F = f|_{\sigma_z=0}, \tag{3}$$

где F – условие текучести.

В пластической области не происходит разгрузки при изменении нагрузки; интегрируя выражение (3), запишем:

$$\varepsilon_\rho^p = \frac{\partial F / \partial \sigma_\rho}{\partial F / \partial \sigma_\theta} \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z^p = \frac{(\partial f / \partial \sigma_z)|_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta} \varepsilon_\theta^p. \tag{4}$$

Деформации во вращающемся диске считаем малыми, поэтому запишем аддитивное разложение полных деформаций на деформации упругие $\varepsilon_\rho^e, \varepsilon_\theta^e$, ε_z^e и пластические ε_ρ^p, ε_θ^p, ε_z^p:

$$\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e, \quad \varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e, \quad \varepsilon_z^p = -\varepsilon_z^e, \quad (\varepsilon_z = 0). \tag{5}$$

Перемещения u определяются соотношениями

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \tag{6}$$

где u – радиальное перемещение.

Условие совместности деформаций:

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \tag{7}$$

Условие текучести максимального касательного напряжения:

$$F = \max\left\{|\sigma_\rho - \sigma_\theta|, |\sigma_\theta - \sigma_z|, |\sigma_z - \sigma_\rho|\right\} - 2k, \tag{8}$$

где k – лимит прочности при одноосном растяжении.

На линии перехода исследуемого объекта из упругого в пластическое состояние не происходит скачкообразного изменения напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} &[u]|_{\rho=c_1} = 0, \\ &[\sigma_\rho]|_{\rho=c_1} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c_1} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

где [ ] – скобка обозначает скачок величин на линии перехода ($\rho = c_1$) из упругого в пластическое состояние.

Годограф вектора напряжений

Для известных выражений напряжений в области упругого состояния [12]

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho = -\frac{3+\nu}{8} m\rho^2 + A - \frac{B}{\rho^2}, \\ &\sigma_\theta = -\frac{1+3\nu}{8} m\rho^2 + A + \frac{B}{\rho^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

определим константы A, B согласно сформулированной задаче. Величина $B = 0$, так как напряжения в центре диска $\rho = 0$ конечны.

По условию задачи на контур диска действует давление p_b, тогда радиальное напряжение $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$. Следовательно, $A = \frac{3+\nu}{8} mb^2 - p_b$, тогда запишем выражения для напряжений

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho = \frac{3+\nu}{8} m(b^2 - \rho^2) - p_b, \\ &\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} m(b^2 - \mu\rho^2) - p_b, \quad \mu = \frac{1+3\nu}{3+\nu}. \end{aligned} \tag{11}$$

Выразим σ_θ через σ_ρ:

$$\sigma_\theta = \mu\sigma_\rho + (1-\nu)\left(\frac{mb^2}{4} - \frac{2p_b}{3+\nu}\right). \tag{12}$$

Выражение (11) представляет годограф вектора напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\sigma_\rho, \sigma_\theta)$.

Результаты исследования

Зарождение пластической области в центре диска происходит, если

$$\begin{cases} 0.2 \le \nu \le 0.5 \ , \\ m = m_0 = \dfrac{8(k + p_b)}{(3+\nu)b^2}, \\ -k < p_b < k, \end{cases} \tag{13}$$

Режимы условия пластичности Треска: $\sigma_\theta = k,\ 0 \le \sigma_\rho \le k.$

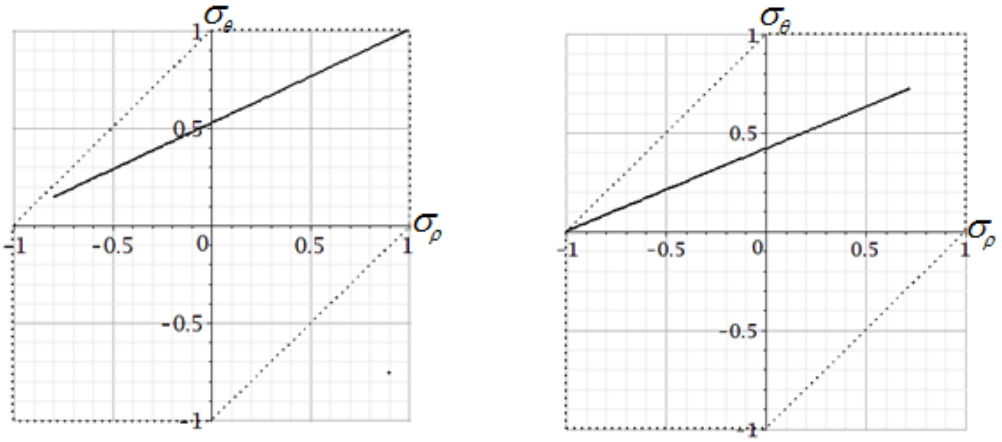
Годограф вектора напряжений при зарождении пластической зоны в центре диска представлен на рис. 1а.

При зарождении пластической области на контуре диска материальные и внешние параметры следующие:

$$\begin{cases} 0 \le \nu \le 0.2 \ , \\ m = m_b = \dfrac{4k}{(1-\nu)b^2}, \\ p_b = k, \end{cases} \tag{14}$$

Режимы условия пластичности Треска: $\sigma_\rho = -k,\ -k \le \sigma_\theta \le 0.$

Годограф вектора напряжений при зарождении пластической зоны на контуре диска представлен на рис. 1б.



а) б)

Рис. 1. Годограф вектора напряжений:
а) зарождение пластической зоны в центре диска $\nu = 0.2,\ p_b = 0.8k,\ m = 4.5$**;**
б) зарождение пластической зоны на контуре диска $\nu = 0.1,\ p_b = k,\ m = 4.44.$

Зарождение пластической области в центре и на контуре диска, режимы условия пластичности Треска $\sigma_\theta - \sigma_\rho = k,\ -k \le \sigma_\rho \le 0,\ \sigma_\theta = k,\ 0 \le \sigma_\rho \le k$, если

$$\begin{cases} \nu = 0.2 \ , \\ m = m_0 = m_b, \\ p_b = k, \end{cases} \tag{15}$$

Годограф вектора напряжения при зарождении пластической зоны в центре и на контуре диска представлен на рис. 2.

При выполнении режимов пластичности Треска $\sigma_\theta = k,\ 0 \le \sigma_\rho \le k,\ \sigma_\theta - \sigma_\rho = k,\ -k \le \sigma_\rho \le 0$ пластическая зона в центре диска будет увеличиваться, если

$$\begin{cases} \nu \in [0; 0.2] \ , \\ m < \dfrac{8(k+p_b)}{(3+\nu)b^2}, \\ p_b < k, \end{cases} \tag{16}$$

или

$$\begin{cases} \nu \in [0; 0.2) \ , \\ \dfrac{3k}{(1-\nu)b^2} \le m \le \dfrac{4k}{(1-\nu)b^2}, \\ p_b = \dfrac{1+\nu}{4} mb^2 - \dfrac{b}{12}\sqrt{3(1+3\nu)(4km-(1-\nu)b^2m^2)} - \dfrac{k}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

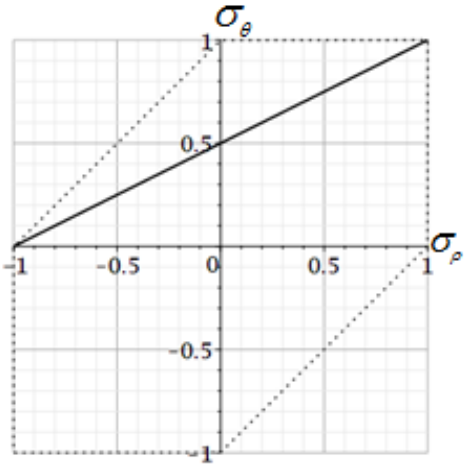
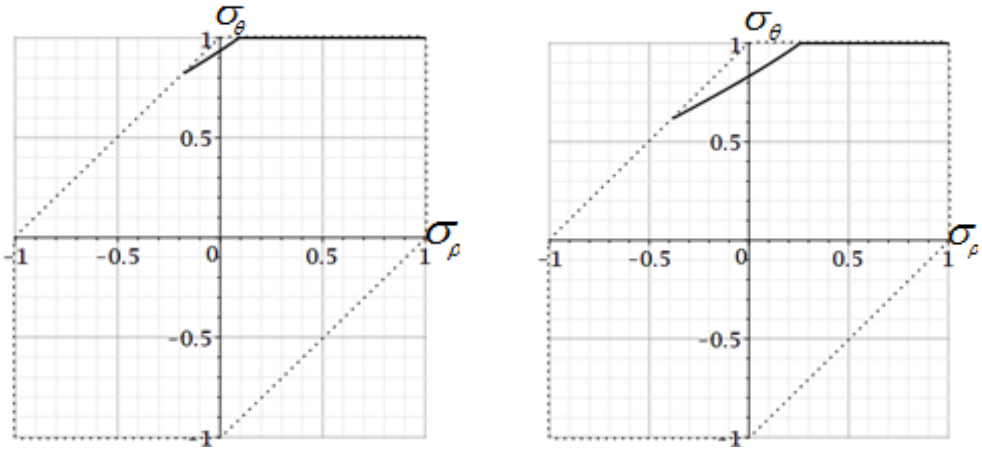


Рис. 2. Годограф вектора напряжений:
зарождение пластической зоны в центре и на контуре диска $\nu = 0.2, p_b = k, m = 5$

Представим годограф вектора напряжений при росте пластической зоны в центре диска (рис. 3).



а) б)

Рис. 3. Годограф вектора напряжений:
а) рост пластической зоны в центре диска: $\nu = 0.15, p_b = 0.18k, m = 3.5, c_1 = 0.88.$ **;**
в) рост пластической зоны в центре диска: $\nu = 0.15, \ p_b = 0.38k, m = 4, \ c_1 = 0.75.$

Зарождение пластической области в центре диска, рост пластической зоны на контуре диска для режимов условия пластичности Треска $\sigma_\theta - \sigma_\rho = k,\ -k \le \sigma_\rho \le 0,\ \sigma_\theta = k,\ 0 \le \sigma_\rho \le k$ происходит, если

$$\begin{cases} \nu \in [0; 0.2]\ , \\ \dfrac{4k}{(1+\nu)b^2} \le m \le \left(5k - k\ln\left(\dfrac{4k}{(1-\nu)b^2}\right)\right)\Big/ b^2, \\ p_b = \dfrac{(1+3\nu)k}{2(1-\nu)}. \end{cases} \tag{18}$$

Годограф вектора напряжений при росте пластической зоны на контуре диска представлен на рис. 4.

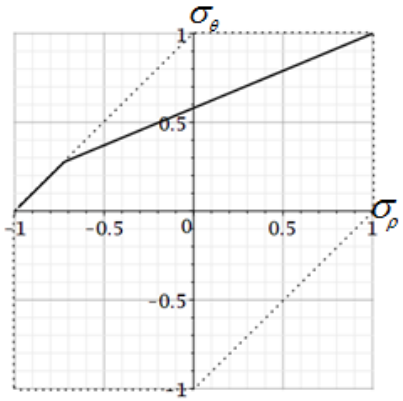


Рис. 4. Годограф вектора напряжений:
рост пластической зоны на контуре диска $\nu = 0.1,\ m = 5.09,\ p_b = 0.98k,\ c_2 = 0.93.$

Одновременный рост пластической зоны в центре диска и на контуре диска при режимах $\sigma_\theta = k, 0 \le \sigma_\rho \le k,\ \sigma_\theta - \sigma_\rho = k,\ -k \le \sigma_\rho \le 0$ условия пластичности Треска выполняются при условии

$$\begin{cases} \nu \in [0; 0.2]\ , \\ \dfrac{3k}{(1-\nu)b^2} \le m \le \dfrac{4k}{(1-\nu)b^2}, \\ p_b = k. \end{cases} \tag{19}$$

Годограф вектора напряжения при одновременном росте пластической зоны в центре диска и на контуре диска показан на рис. 5.

Диск переходит в предельное состояние, при рассмотрении режимов $\sigma_\theta = k, 0 \le \sigma_\rho \le k,$ $\sigma_\theta - \sigma_\rho = k,\ -k \le \sigma_\rho \le 0$ условия пластичности Треска, когда материальные параметры и параметры нагрузки соответствуют условиям (20):

$$\begin{cases} 0.2 \le \nu \le 0.5, \\ 3k + k\ln\dfrac{b^2 m_{\max}}{3k} - b^2 m_{\max} = 0, \\ p_b = \dfrac{mb^2 - 3k}{2} - k\ln\dfrac{b}{c}. \end{cases} \tag{20}$$

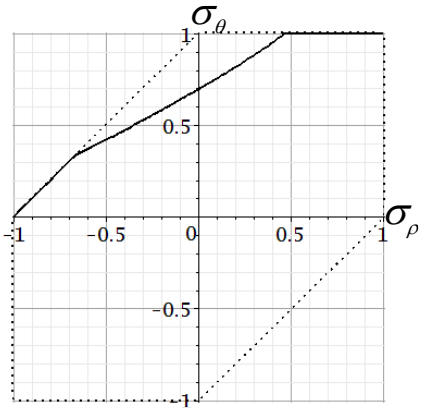


Рис. 5. Годограф вектора напряжения:
$\nu = 0.2;\ m = 5.0, c_1 = 0.56, c_2 = 0.91,\ 0 \le \rho \le c_1,\ c_2 \le \rho \le b.$

Годограф вектора напряжений, когда дальнейшая эксплуатация диска недопустима, представлен на рис. 6.

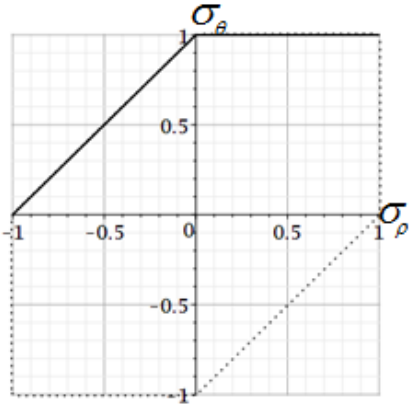


Рис. 6. Годограф вектора напряжения:
предельное состояние диска $\nu = 0.5,\ p_b = k,\ m = 5.63k.$

Заключение

Получены аналитические зависимости для материальных параметров и параметров внешних воздействий, при которых начинается развитие пластических зон. Правильность определения аналитических зависимостей позволяет верифицировать годограф вектора напряжений. В данном исследовании учитывалось влияние давления, распределенного равномерно на контуре диска, и изменения скорости вращения на формирование пластических зон. Дальнейшая работа связана с исследованием изотропного материала, для которого коэффициент Пуассона лежит в интервале от -1 до $0{,}2$.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Акиньшин В.В., Колодяжный В.Э., Найденов А.Е., Скорняков Н.С. Предельное состояние вращающегося диска // Инженерный вестник Дона. 2019. № 5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2015/5933 (дата обращения: 04.11.2022).
2. Абашкин Е.Е., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Условие пластичности максимальных приведённых касательных напряжений в качестве средства расчётов эволюции плоских напряжённых состояний // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т. 1, № 2(34). С. 51–62.

3. Александрова Н.Н., Артемов М.А., Барановский Е.С., Шашкин А.И. О напряженном и деформированном состоянии вращающегося диска // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф., Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2019. С. 1006–1011.
4. Акиньшин В.В., Артемов М.А., Барановский Е.С., Скорняков Н.С., Фатхудинов Д.Б. Математическое моделирование упругопластического состояния вращающегося диска // Инженерный вестник Дона. 2019. № 6(57). С. 35. EDN: QNYDJT
5. Артемов М.А., Барановский Е.С., Сёмка Э.В., Шашкин А.И. Об использовании кусочно-линейных функций пластичности // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф., Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2020. С. 1234–1239.
6. Бердзенишвили Г.Г., Пеньков Н.А., Сёмка Э.В., Фатхудинов Д.Б. Математическое моделирование состояния вращающегося диска // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIX междунар. науч.-метод. конф., Воронеж, 14–15 февраля 2019 г. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2019. С. 210–216.
7. Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146.
8. Фирсов С.В., Прокудин А.Н., Буренин А.А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 4(80). С. 121–133.
9. Буренин А.А., Ткачева А.В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 40–49.
10. Ковтанюк JI.В., Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Кусочно-линейный потенциал ползучести в деформациях ползучести быстровращающегося цилиндра // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т. 1, № 3 (35). С. 101–108.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
12. Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 120–135. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.12
13. Соколовский В.В. Пластическое напряженное состояние вращающихся дисков // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 1, вып. 1. С. 87–94.
14. Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. On stress/strain state in a rotating disk. *Journal of Physics. Conf. Series*. 2019;1203:012001. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/-1/012001
15. Eraslan A.N. Tresca's yield criterion and linearly hardening rotating solid disks having hyperbolic profiles. *Forschung im Ingenieurwesen*. 2004;69:17–28.
16. Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.R. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs. *Archive of Applied Mechanics*. 2016;86:235–244.
17. Syomka E.V., Artemov M.A., Babkina Y.N., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. Mathematical modeling of rotating disk states. *Journal of Physics: Conf. Series*. 2020;1479:012122. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122
18. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill, 1970. 506 p.

Original article
http://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-4/3-12

Syomka E.

ELEONORA V. SYOMKA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer,
semka_elya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-0194-6979
Military Training and Scientific Center of the Air Force
Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarina
Voronezh, Russia

Qualitative and quantitative analysis of the elastoplastic state of a rotating thin disk

Abstract. The task of a rotating disk with a constant small thickness, which is under the action of a uniformly distributed pressure along its contour, was considered. Total deformations are equal to the addition of elastic and plastic ones, since the deformations are quite small. Plastic deformations and stresses are interconnected by the plastic flow rule. A plastically incompressible isotropic body is considered. The condition of continuity of the plasticity function is satisfied. The stress and displacement vectors are continuous at the interface between elastic and plastic zones. When determining the plastic zones, depending on the external parameters, all possible modes of the plasticity condition of the maximum shear stress were considered. Analytical expressions are presented for the external parameters at which the nucleation of plastic zones occurs. The stress hodograph plots, presented in the paper, give a visual representation of the development of plastic zones.
Keywords: elastoplastic body, plane stress state, plastic flow theory, associated plastic flow rule, stress vector hodograph

For citation: Syomka E. Qualitative and quantitative analysis of the elastoplastic state of a rotating thin disk. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2022;(4):3–12. (In Russ.).

The author declares no conflict of interests.

REFERENCES

1. Akinshin V.V., Kolodyazhny V.E., Naydenov A.E., Skornyakov N.S. Limit state of a rotating disk. *Engineering Journal of Don*. 2019;(5). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2015/5933 (In Russ.).
2. Abashkin E.E., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A. The condition of plasticity of maximum reduced shear stresses as a means of calculating the evolution of plane stress states. *Uchenye zapiski tekhnicheskogo Komsomolskogo-on-Amur gosudarstvennogo universiteta*. 2018;1(2/34): 51–62. (In Russ.).
Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. On the stressed and deformed state of a rotating disk. *Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics:* Proc. of the Int. Sci. and Tech. Conf., Voronezh, December 17–19, 2018. Voronezh, Scientific and Research Publications Publishing House, 2019. 1006–1011 p. (In Russ.).
3. Akinshin V.V., Artemov M.A., Baranovsky E.S., Skornyakov N.S., Fatkhudinov D.B. Mathematic modeling of the elasto-plastic state of a rotating disk. *Engineering Journal of Don.* 2019;(8):35. EDN: QNYDJT (In Russ.).
4. Artemov M.A., Baranovsky E.S., Semka E.V., Shashkin A.I. On the use of piecewise linear plasticity functions. *Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics*: Proc. of the Int. Sci. and Tech. Conf., Voronezh, November 11–13, 2019. Voronezh, Scientific and Research Publications Publishing House, 2020. 1234–1239 p. (In Russ.).
5. Berdzenishvili G.G., Penkov N.A., Syomka E.V., Fatkhudinov D.B. Mathematical modeling of the state of a rotating disk. *Informatics: problems, methodology, technologies*: Proc. of the XIX Int. Sci. and Meth. Conf., Voronezh, February 14–15, 2019. Voronezh, Scientific and Research Publications Publishing House, 2019. 210–216 p. (In Russ.).

6. Burenin A.A., Kaing M., Tkacheva A.V. On the calculation of plane stress states in the theory of transient temperature stresses in elastic-plastic bodies. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018;18(2):131–146. (In Russ.).
7. Firsov S.V., Prokudin A.N., Burenin A.A. Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019;13(4):642–652. (In Russ.).
8. Burenin A.A., Tkacheva A.V. Piecewise linear plastic potentials as a means of calculating plane unsteady temperature stresses. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Solid State Mechanics*. 2020;(6):40–49. (In Russ.).
9. Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N., Firsov S.V. Piecewise linear creep potential in creep deformations of a rapidly rotating cylinder. *Uchenye zapiski Komsomolskogo-on-Amur gosudarstvennogo tekhnich-eskogo universiteta*. 2018;1(3):101–108. (In Russ.).
10. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow, Nauka, 1969. 420 p. (In Russ.).
11. Prokudin A.N., Firsov S.V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019;(4):120–135. (In Russ.).
12. Sokolovsky V.V. Plastic stress state of rotating. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1948;1(1):87–94. (In Russ.).
13. Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. On stress/strain state in a rotating disk. Journal of Physics. Conf. Series. 2019;1203:012001. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/-1/012001
14. Eraslan A.N. Tresca's yield criterion and linearly hardening rotating solid disks having hyperbolic profiles. Forschung im Ingenieurwesen. 2004;69:17–28.
15. Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.R. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs. Archive of Applied Mechanics. 2016;86:235–244.
16. Syomka E.V., Artemov M.A., Babkina Y.N., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. Mathematical modeling of rotating disk states. Journal of Physics: Conf. Series. 2020;1479:012122. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122
17. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill, 1970. 506 p.