Физические поля корабля, океана и атмосферы

DOI: https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7
УДК 534.231-14:51:004.032.26

С.А. Шевкун, Н.С. Самойлов

ШЕВКУН СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ – к.ф.-м.н., доцент, SPIN: 7618-5821, ResearcherID: AAF-6258-2021, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5312-1776, ScopusID: 6508158641, shevkun.sa@dvfu.ru
САМОЙЛОВ НИКИТА СЕРГЕЕВИЧ – магистрант (автор, ответственный за переписку), samoilov.ns@students.dvfu.ru
Политехнический институт
Дальневосточный федеральный университет
Владивосток, Россия

Применение нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния

Аннотация: В данной работе рассмотрен один из вариантов нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния – с использованием радиально-базисной нейронной сети. Полученные результаты сравниваются с результатами других численных методов. Рассмотрено решение уравнения Гельмгольца. Проведены численные эксперименты с помощью разработанной авторами статьи программы по восстановлению зависимости значения квадрата волнового числа от глубины расположения приемника с помощью радиально-базисной нейронной сети. Результаты исследования можно применять для решения различных прикладных задач, связанных с системами гидроакустической и подземной связи, техническими средствами для исследования океана, а также для навигации.
Ключевые слова: прямая задача рассеяния, обратная задача рассеяния, нейронная сеть, решение уравнения Гельмгольца

Введение

В прямых задачах рассеяния (задачах анализа) требуется найти характеристики акустического поля, при этом свойства исследуемой среды предполагаются известными. Если свойства изучаемой среды неизвестны, возникают обратные задачи рассеяния, в которых по значению измеренных характеристик акустического поля требуется найти свойства изучаемой среды путем определения коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих распространение акустических волн. (Далее в статье мы для краткости будем использовать в основном термины «прямая задача» и «обратная задача».) Исследование обратных задач очень важно как с теоретической, так и с практической точки зрения, это одна из актуальных задач акустики. Правильная оценка параметров среды позволит верно рассчитать дальность излучения, необходимую мощность излучателя, сопротивление излучения, конфигурацию антенны и прочие необходимые характеристики акустического прибора. Рассматриваемая нами задача наиболее актуальна в случае распространения сигнала в существенно неоднородной среде.

Для решения задач анализа акустического поля обычно используются аналитические и численные методы. Каждый из них имеет свои недостатки: аналитические методы невозможно применить в случае, когда геометрия задачи не имеет простого математического описания, а численные методы часто неэффективны для областей большого волнового размера. Один из

Статья: поступила: 15.03.2021; рецензия: 29.03.2021; финансирование: Дальневосточный федеральный университет.

новых подходов [2, 6, 8, 9] для решения задач акустики состоит в применении методов, используемых в теории искусственных нейронных сетей.

Это обусловлено следующими факторами [2].

- Трудность применения стандартных методов ввиду большого объема данных, сложности геометрии задачи.
- Необходимость неклассической постановки задач.
- Поиск единого подхода к решению совершенно разных типов задач, для каждого из которых применяют свои методы.
- Поиск новых направлений развития численных методов.
- Появление новых технологий (нейрокомпьютеры) и построение новых алгоритмов.
- При совершенствовании модели: корректировке постановки задачи, связанной с модификацией условий, уточнении или пополнении экспериментальных данных отсутствует необходимость строить нейросетовую модель вновь, достаточно использовать уже имеющуюся нейронную сеть и доучить ее.

Исследование нового подхода к построению устойчивых моделей на основе нейросетевой методологии в акустике и конструировании соответствующих нейросетевых алгоритмов, использующих достоинства нейросетевых аппроксимаций, представляет актуальную и недостаточно изученную задачу [2]. Построение математической модели по разнородным данным, включающим как уравнения, так и экспериментальные наблюдения, довольно актуально для практики.

Для изучения обратных задач одним из мощных средств является оптимизационный метод [3]. Идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач принадлежит А.Н. Тихонову [5]. Обзор работ, посвященных оптимизационному методу решения обратных задач, приведен в [7]. В работе [4] для одномерного волнового уравнения акустики ставится коэффициентная обратная задача, которая сводится к задаче оптимального управления и далее исследуется методами теории оптимального управления.

Можно проследить аналогию между методами теории оптимального управления и нейросетевыми методами: необходимо найти минимум функционала, зависящего от разности между функцией, описывающей известные характеристики акустического поля, и функцией, аппроксимирующей решение дифференциального уравнения, моделирующего распространение акустических волн. Минимум находится численными методами после определения градиента функционала.

Цель предлагаемой статьи – применение одного из вариантов нейросетевого подхода для решения прямых и обратных задач рассеяния: для определения параметров среды распространения акустического сигнала на основе измерения его характеристик. Для этого нам необходимо сделать следующее [2].

- Сформулировать задачи в рамках нейросетевой парадигмы.
- Разработать программу, реализующую нейронную сеть.
- Рассмотреть простую задачу, имеющую известное аналитическое решение, сравнить его с решением, найденным с помощью нейронных сетей.
- Рассмотреть возможность распространения предлагаемого нами решения этой задачи на некоторый достаточно широкий класс практически важных задач.
- Рассмотреть решение обратных задач рассеяния, адаптировать их применение для типичных задач акустики.

Методы

В работе использовалась математическая модель в виде уравнения Гельмгольца для потенциала колебательной скорости в двумерной системе координат. Предположим, что значение волнового числа меняется только с глубиной x и не меняется вдоль других координат z (дистанция). Используя метод разделений переменных, можно записать искомый потенциал колебательной скорости в виде произведения двух функций

$$\varphi(x,z) = \varphi_x(x) \cdot e^{ik_y \cdot y} \cdot e^{ik_z \cdot z} ,$$

где x, y, z – координаты (глубина, дистанция),

k_y, k_z – компоненты волнового числа в направлениях y, z (константы),

φ_x(x) – часть искомого потенциала колебательной скорости, имеющей зависимость от координаты x.

Уравнение Гельмгольца для нахождения φ_x(x) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_x(x) = -\varphi_x(x) \cdot k_x(x)^2, \tag{1}$$

где k_x(x) – зависимость компоненты волнового числа в направлении x от координаты x (глубина).

В данной работе предлагается находить решение уравнения (1) с помощью аппроксимации, осуществляемой нейронной сетью достаточно простой архитектуры: с одним входом и двумя выходами – для реальной и мнимой частей решения (рис. 1).

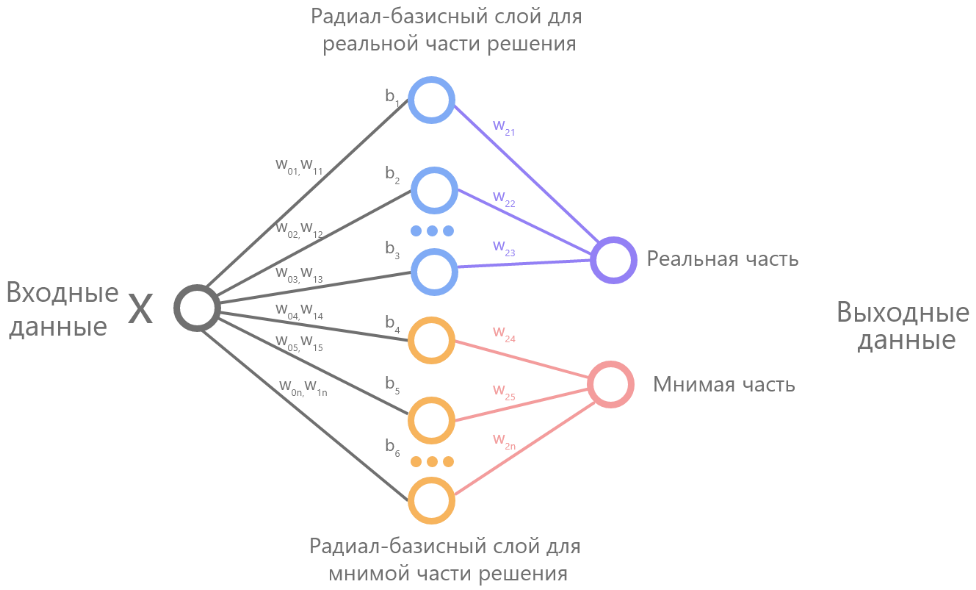

Рис. 1. Архитектура нейронной сети для задачи анализа

На вход нейронной сети поступает вектор x, представляющий координаты точек (глубину), для которых известно решение уравнения (1) или его необходимо найти, а на выход – реальная и мнимая части приближенного решения уравнения (1) $\varphi_{pred}(x)$.

Сигнал на каждом из выходов нейронной сети можно представить в аналитическом виде как функцию

$$\varphi_{pred}(x_i) = \sum_j w_{2,j} \cdot b_j\left(w_{0,j}, w_{1,j}, x_i\right), \tag{2}$$

где $b_j\left(w_{0,j}, w_{1,j}, x_i\right)$ – активационная функция нейрона с индексом j,

w_{ij} (здесь i – от 0 до 2) – веса нейронной сети,

i – номер исследуемой точки с координатой x_i, всего Nx точек,

j – номер нейрона, всего N нейронов.

В данной работе использовалась радиально-базисная активационная функция

$$b_j\left(w_{0,j}, w_{1,j}, x\right) = e^{-w_{0,j} \cdot \left(w_{1,j} - x\right)^2}. \tag{3}$$

Тогда задача нахождения численного решения уравнения (1) сводится к оптимизационной задаче: минимизации ошибки E($\vec{p}$) между левой частью дифференциального уравнения (1) и функцией $f\left(x, \varphi_{pred}(x)\right)$, представляющей правую часть дифференциального уравнения (1). Минимизация производится с помощью подбора весов нейронной сети w_{ij}, которые объединим в вектор $\vec{p}$:

$$E|\vec{p}| = \frac{\sum_{i\,=\,1}^{Nx} \{\frac{d^2}{dx^2}\varphi_x(x_i) - f(x_i, \varphi_{pred}(x_i))\}^2}{Nx}. \quad (4)$$

Выражение для второй производной от приближенного решения $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{pred}(x_i)$ было найдено в аналитической форме, учитывая (3).

Таким образом, порядок нахождения решения прямой задачи следующий:

1) первоначально задаются случайные веса $w_{0,j}, w_{2,j}, w_{3,j}$,

2) после подачи на вход нейронной сети значений x_i на ее выходе формируются значения приближенного решения $\varphi_{pred}(x_i)$,

3) вычисляется значение функционала (4), а также его градиент относительно весов нейронной сети,

4) значения градиента используются для вычисления откорректированных весов нейронной сети с помощью некоторого метода оптимизации,

5) повторяются шаги 1–4 (называемые эпохой обучения) до достижения необходимого минимального значения функционала (4) либо заданного максимального числа эпох обучения.

Для решения задачи Коши к функционалу (4) добавляется квадрат разности между заданными начальными условиями и приближенным решением задачи и его производной в начальной точке.

Для решения обратной задачи рассеяния по определению зависимости волнового числа от координат можно использовать нейронную сеть, применяемую ранее для решения прямой задачи.

Для обратной задачи используется тот же ход решения, что и для прямой задачи, за исключением того, что к значению функционала (4) добавляется сумма квадратов разности между измеренным потенциалом колебательной скорости (давлением) $\varphi_{izm}(xr_k)$ и предсказанным нейронной сетью значением $\varphi_{pred}(xr_k)$ в наборе точек измерения с координатами xr_k, где k – номер точки измерения (всего Nk точек):

$$E|\vec{p}| = \frac{\sum_{i\,=\,1}^{Nx} \{\frac{d^2}{dx^2}\varphi_x(x_i) - f(x_i, \varphi_{pred}(x_i))\}^2}{Nx} + \frac{\sum_{k\,=\,1}^{Nk} \{\varphi_{izm}(xr_k) - \varphi_{pred}(xr_k)\}^2}{Nk}$$

После нахождения приближенного решения (2), а также его второй производной, исходя из (1), можно решить обратную задачу – оценить зависимость значений квадрата волнового числа на всем протяжении координат x, зная измеренное значение φ_x(x) в некоторых точках, и по ним восстанавливая зависимость $\varphi_{pred}(x)$:

$$k_x(x)^2 = \frac{\frac{d^2}{dx^2}\varphi_{pred}(x)}{\varphi_{pred}(x)}. \quad (5)$$

Для улучшения качества восстановления квадрата волнового числа можно модернизировать архитектуру нейронной сети (рис. 2), добавив дополнительные нейроны, моделирующие зависимость квадрата волнового числа от глубины x.

Численный эксперимент

Для проверки предложенных идей была рассмотрена одна из модельных задач гидроакустики – случай распространения звука в неоднородной среде со слоем Эпштейна [1], когда профиль квадрата волнового числа подчиняется следующему закону:

$$k(x)^2 = bt + at \cdot tanh(\Delta\lambda \cdot x), \quad (6)$$

где at, bt, Δλ – параметры профиля квадрата волнового числа,

x – координата (глубина).

Зависимость (6) выбрана для модельной задачи в связи с тем, что для нее известно аналитическое решение для данной зависимости, которое можно использовать для нахождения измеренных значений φ_x(x) в случае решения обратной задачи.

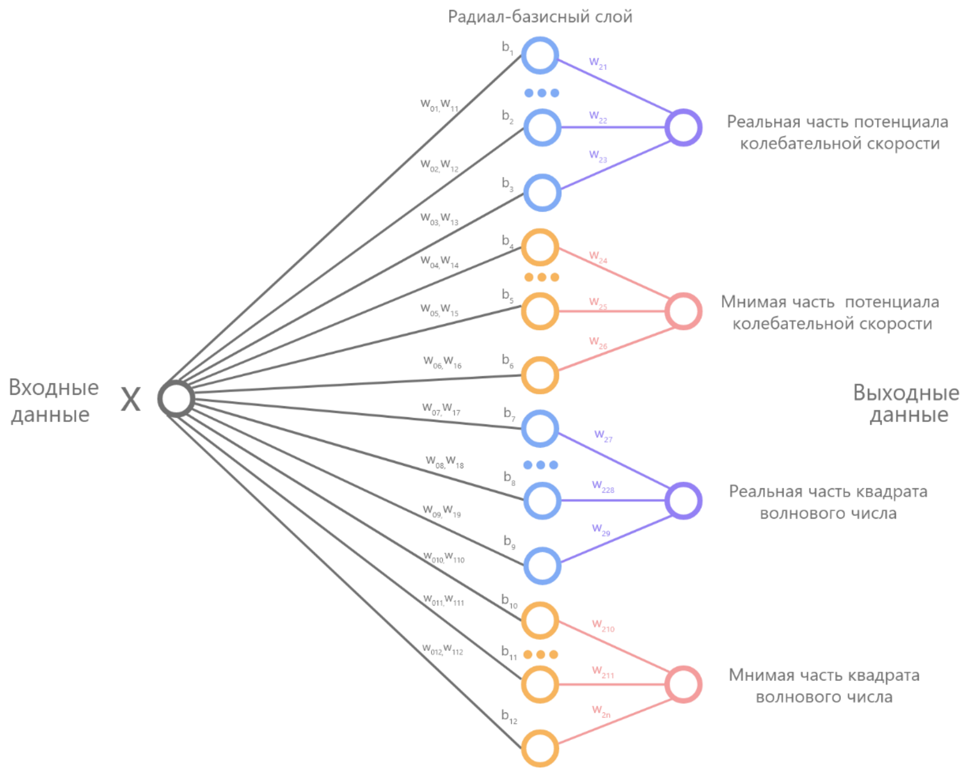

Рис. 2. Архитектура нейронной сети для решения обратной задачи

Аналитическое решение уравнения (1) в неоднородной среде со слоем Эпштейна сводится [1] к решению гипергеометрического уравнения Гаусса:

$$\xi \cdot (\xi - 1) \cdot \frac{d^2}{d\xi^2}\omega + [(\alpha + \beta + 1) \cdot \xi - \gamma] \cdot \frac{d}{d\xi}\omega + \alpha \cdot \beta \cdot \omega = 0, \quad (7)$$

где произведена замена $\varphi = \omega \cdot (-\xi)^{\frac{kt}{\Delta\lambda}}$,

ξ – новая координата, определяемая по выражению $\xi(x, \Delta\lambda) = \frac{tanh(\Delta\lambda \cdot x) - 1}{1 + tanh(\Delta\lambda \cdot x)}$,

α, β, γ – коэффициенты, зависящие от параметров слоя Эпштейна at, bt, Δλ, определяются как

$$\alpha(\Delta\lambda, at, bt) = \frac{i \cdot \sqrt{bt + at} + i \cdot \sqrt{bt - at}}{2 \cdot \Delta\lambda}, \quad (8)$$

$$\beta(\Delta\lambda, at, bt) = \frac{i \cdot \sqrt{bt + at} - i \cdot \sqrt{bt - at}}{2 \cdot \Delta\lambda}, \quad (9)$$

$$\gamma(\Delta\lambda, at, bt) = \frac{i \cdot \sqrt{bt + at}}{\Delta\lambda} + 1. \quad (10)$$

В результате аналитическое решение будет иметь вид:

$$\omega(z) = C_1 \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, z) + C_2 \cdot z^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (11)$$

где C_1, C_2 – константы, зависящие от начальных условий,

F (x) – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая по формуле

$$F_1(\xi, \alpha, \beta, \gamma) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{t-1} \left[\frac{(\alpha + i) \cdot (\beta + i)}{\gamma + i}\right] \frac{\xi^t}{t!}\right]. \quad (12)$$

С учетом преобразований получим конечное решение для падающей волны в виде:

$$P_{pad}(x) = C_1 \cdot e^{-x \cdot i \cdot \sqrt{bt+at}} \cdot F_1(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma), \tag{13}$$

для отраженной волны в виде:

$$P_{otr}(x) = C_1 \cdot e^{x \cdot i \cdot \sqrt{bt+at}} \cdot F_1(x, \lambda, \alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma). \tag{14}$$

Расчет производился с помощью разработанной нами программы на языке программирования Python с использованием библиотек Keras, Scipy, Mpmath. На рис. 3 показано сравнение результатов расчета прямой задачи с помощью этой программы и известного аналитического решения задачи по формулам (13), (14) в случае, когда зависимость квадрата волнового числа от глубины можно описать формулой (6).

а)

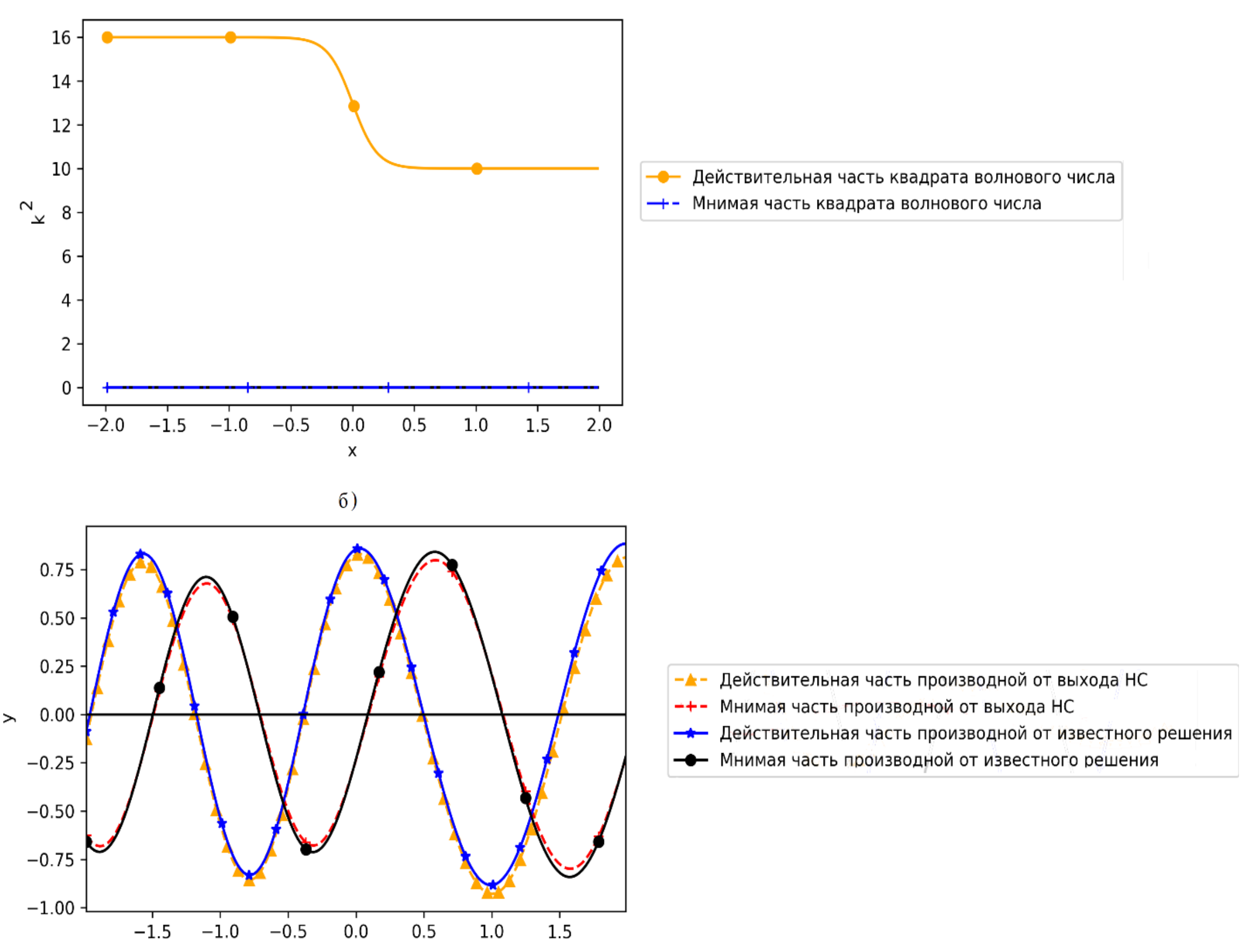

Рис. 3. Графики зависимости:
а – квадрата волнового числа от x, б – известного аналитического решения и выхода нейронной сети

Также было проведено сравнение результатов, полученных с помощью разработанной нами программы с результатами, полученными методом Рунге–Кутты для решения задачи Коши – для случая, когда аналитическое ее решение неизвестно (рис. 4).

Для проверки правильности работы нашей программы по нахождению решения обратной задачи рассеяния было использовано аналитическое решение по формулам (13), (14) для заранее известной зависимости квадрата волнового числа от глубины. Рассчитанные по данным формулам значения в ряде точек были загружены в нашу программу в качестве измеренных значений. По этим значениям с помощью программы была восстановлена зависимость квадрата волнового числа от глубины.

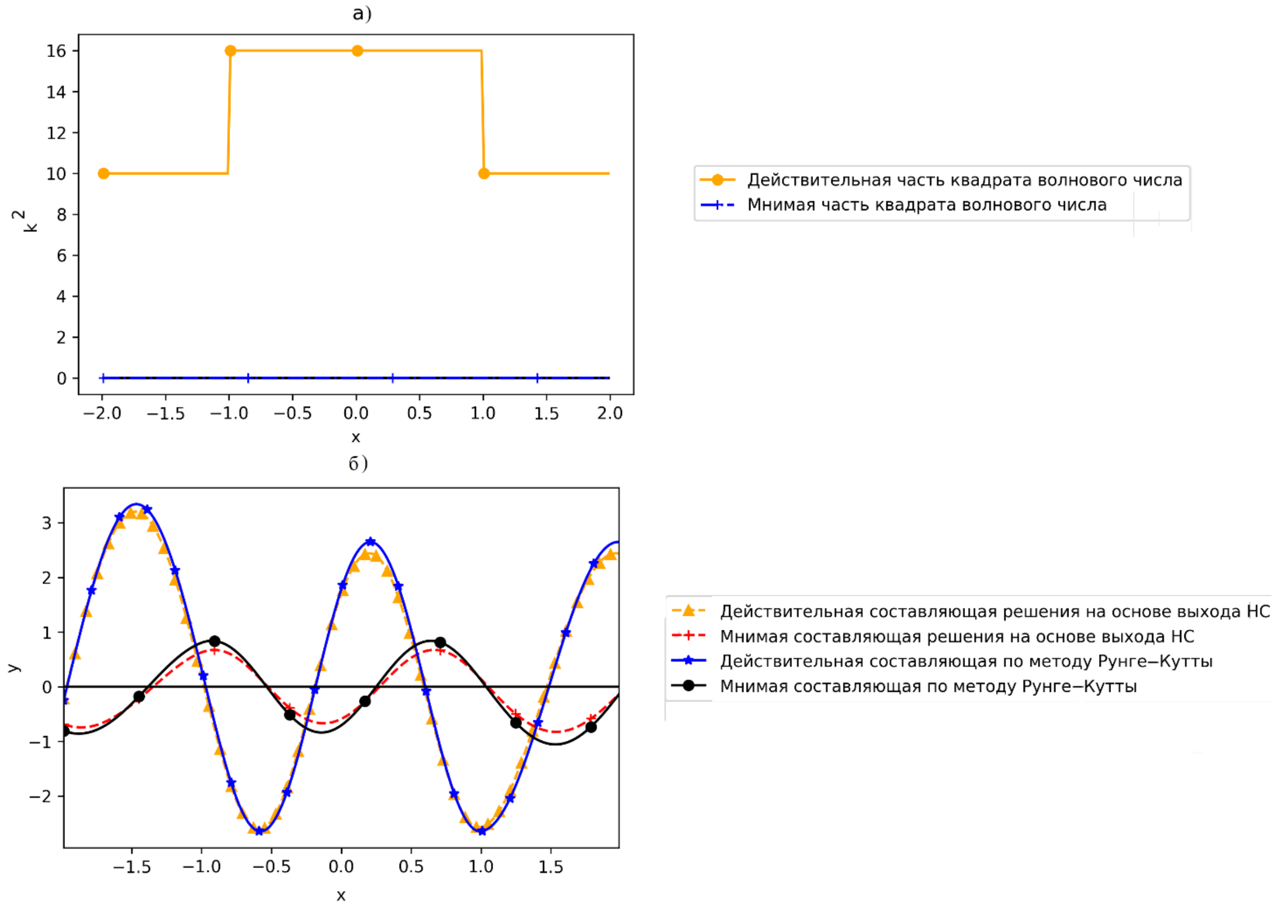

Рис. 4. Графики зависимости от координаты x:
а – квадрата волнового числа, б – решения, полученного методом Рунге–Кутты,
и значений на выходе нейронной сети

Пример восстановленного квадрата волнового числа от глубины x по формуле (5) с помощью разработанной нами программы в сравнении с исходной зависимостью квадрата волнового числа от глубины x показан на рис. 5. Использованы следующие параметры: показатель скорости изменения квадрата волнового числа $\Delta\lambda = 1$, количество точек измерения потенциала колебательной скорости Nk = 100, количество эпох обучения (равно 8000), количество нейронов (N=360); расчет произведен для Nx=200 точек.

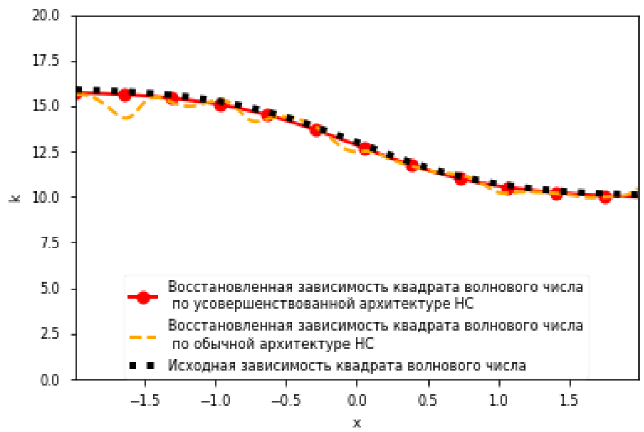

Рис. 5. Зависимость восстановленного значения квадрата волнового числа
от глубины x в сравнении с исходной зависимостью

Точность восстановления квадрата волнового числа с помощью усовершенствованной архитектуры нейронной сети, представленной на рис. 2, составила 2×10^{-3}.

Обсуждение результатов

В отличие от других работ [2, 3, 6, 8, 9], где находилось решение волнового уравнения, в данной статье мы рассматривали более простую задачу: найти решение прямой и обратной задачи в случае использования математической модели в виде уравнения Гельмгольца, которая удовлетворяет большинству практических задач акустики. В этом случае возможно применить более простую архитектуру нейронной сети.

Проведенные расчеты показали следующие особенности использования нейронных сетей для решения прямых задач. Решение прямой задачи с помощью разработанной нами программы обеспечивает приемлемую точность, но требует гораздо больших временных затрат по сравнению с методом Рунге–Кутты. Однако нейросетевой подход обладает большей гибкостью: он позволяет найти множество решений уравнения Гельмгольца, выбирая одно из них исходя из известных значений давления и колебательной скорости в произвольном наборе точек.

С помощью нейросетевого подхода можно также найти приближенное решение задачи в случае резких скачков и разрывов функции, описывающей квадрат волнового числа, что представляет известную проблему при использовании иных численных методов.

Решение обратной задачи с помощью нейросетевого подхода принципиально не отличается от решения прямой задачи, поскольку вторая производная от потенциала колебательной скорости должна быть найдена при решении обеих задач.

Однако, поскольку обратная задача является некорректно поставленной задачей, результат восстановления квадрата волнового числа чувствителен к погрешности измерения исходных данных.

Таким образом, по нашему мнению, использование нейросетевого подхода к решению обратной задачи акустики является перспективным направлением исследований. В дальнейшем следует уделить внимание увеличению точности и стабильности получаемых результатов.

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах, 2-е изд. М.: Наука, 1973. 343 с. URL: https://-www.geokniga.org/books/9382 (дата обращения: 15.02.2021).
2. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2009. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/si21-76.pdf/info (дата обращения: 15.02.2021).
3. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001. 315 с. URL: https://-search.rsl.ru/ru/record/01000971264 dan28329 (дата обращения: 15.02.2021).
4. Кулиев Г.Ф., Насибзаде В.Н. Приведение обратной задачи акустики к задаче оптимального управления и её исследование // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 54. С. 5–16. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/54/1
5. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501−504. URL: http://mi.mathnet.ru/dan28329 (дата обращения: 15.02.2021).
6. Jianyu L., Siwei L., Yingjian Q., Yaping H. Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks. Neural Networks. 2003;16(5–6):729–734. DOI: https://doi.org/10.1016/S0893-6080(03)00083-2
7. Kabanikhin S.I. Numerical analysis of inverse problems. J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1995(3);4:278–304 p. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.4.278
8. Nam Mai-Duy, ThanhTran-Cong. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks. Neural Networks. 2001;14(2):185–199. DOI: https://doi.org/-10.1016/S0893-6080(00)00095-2
9. Ricky T.Q. Chen, Rubanova Yu., Bettencourt J., Duvenaud D.K. Neural ordinary differential equations. NIPS'18: Proceedings of the 32nd Intern. conference on neural information processing systems. December, 2018, 6571–6583 p. URL: https://arxiv.org/abs/1806.07366 – 15.02.2021.

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2021. N 2/47
Physical Fields of Ship, Ocean and Atmosphere www.dvfu.ru/en/vestnikis

DOI: https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7

Shevkun S., Samoylov N.

SERGEY SHEVKUN, Candidate of Physics and Mathematical Sciences, Associate Professor, ResearcherID: AAF-6258-2021, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5312-1776, ScopusID: 6508158641, shevkun.sa@dvfu.ru
NIKITA SAMOYLOV, MS-Student (Corresponding Author), samoilov.ns@students.dvfu.ru
Polytechnic Institute,
Far Eastern Federal University
Vladivostok, Russia

Application of the neural network approach for solution of direct and inverse problems of scattering

Abstract: In this paper, we consider one of the variants of the neural network approach for solving direct and inverse scattering problems – using a radial-basis neural network. The results obtained are compared with the results of other numerical methods. Solution of the Helmholtz equation is considered as well. Numerical experiments were carried out to restore the dependence of the square value of the wave number on the depth using a radial-basis neural network. The results of the study can be used to solve various applied problems related to hydroacoustic and underground communication systems, technical means for ocean exploration, as well as for navigation.
Keywords: direct scattering, inverse scattering, neural network, Helmholtz equation

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

REFERENCES

1. Brekhovskikh L.M. Waves in layered media. M., Nauka, 1973, 340 p. URL: https://www.geokniga.org/books/9382 – 15.02.2021.
2. Vasiliev A.N., Tarkhov D.A. Neural network modeling. Principles. Algorithms. Applications. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2009. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/si21-76.pdf/info – 15.02.2021.
3. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T. Optimization methods for solving coefficient inverse problems. Novosibirsk, NSU, 2001, 315 p. URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01000971264 dan28329 – 15.02.2021.
4. Kuliev G.F., Nasibzade V.N. Reduction of the inverse problem of acoustics to the problem of optimal control and its study. Tomsk State University Journal. Mathematics and Mechanics. 2018 (54):5–16. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/54/1
5. Tikhonov A.N. On the solution of ill-posed problems and the regularization method. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1963(151);3:501–504 p. URL: http://mi.mathnet.ru/dan28329 – 15.02.2021.
6. Jianyu L., Siwei L., Yingjian Q., Yaping H. Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks. Neural Networks. 2003;16(5–6):729–734. DOI: https://doi.org/10.1016/S0893-6080(03)00083-2
7. Kabanikhin S.I. Numerical analysis of inverse problems. J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1995(3);4:278–304 p. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.4.278
8. Nam Mai-Duy, ThanhTran-Cong. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks. Neural Networks. 2001;14(2):185–199. DOI: https://doi.org/10.1016/S0893-6080(00)00095-2
9. Ricky T.Q. Chen, Rubanova Yu., Bettencourt J., Duvenaud D.K. Neural ordinary differential equations. NIPS'18: Proceedings of the 32nd Intern. conference on neural information processing systems. December, 2018, 6571–6583 p. URL: https://arxiv.org/abs/1806.07366 – 15.02.2021.