

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>

Д.А. Шляхин, Е.В. Савинова, В.А. Юрин

ШЛЯХИН ДМИТРИЙ АВЕРКИЕВИЧ – д.т.н., доцент, заведующий кафедрой,
d-612-mit2009@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

САВИНОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА – старший преподаватель, slenax@yandex.ru,
<http://orcid.org/0000-0001-7155-2281>

ЮРИН ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ – инженер, smsm@samgtu.ru

Кафедра «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты»
Академия строительства и архитектуры

Самарский государственный технический университет

Самара, Россия

Динамическая задача термоэластостатики для круглой жестко закрепленной пластины

Аннотация: Построено новое замкнутое решение динамической осесимметричной задачи термоэластостатики для круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины в случае действия на ее лицевых поверхностях температурной нагрузки (граничные условия 1-го рода). На основании гиперболической теории теплопроводности Лорда–Шульмана определяется температурное поле в конструкции с последующим исследованием связанной задачи термоэластостатики. Расчетные соотношения, полученные при использовании метода неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований, позволяют определить температуру и напряженно-деформированное состояние пластины в случае действия нестационарной нагрузки. Проанализирована особенность использования гиперболической теории теплопроводности в пьезокерамических пластинах, показана необходимость учета инерционных свойств упругой системы различной толщины.

Ключевые слова: задача термоэластостатики, пьезокерамическая круглая пластина, динамическая нагрузка, конечные интегральные преобразования

Для цитирования: Шляхин Д.А., Савинова Е.В., Юрин В.А. Динамическая задача термоэластостатики для круглой жестко закрепленной пластины // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2022. № 1(50). С. 3–16. <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>

Введение

В современной практике для контроля нестационарных процессов в измерительных и управляющих системах используются пьезокерамические датчики. Их работа в рамках прямого пьезоэффекта дает возможность преобразовать, как правило, механическое или кинематическое воздействие в электрический сигнал [8, 13]. В последнее время широкое применение получили тепловые датчики [4, 5, 7], для которых внешней нагрузкой является температура. Для описания их работы и повышения функциональных возможностей, основанных на взаимном влиянии температурных, электрических и упругих полей, используется математическая модель теории термоэластостатики [17]. При этом сформулированные расчетные соотношения включают систему несамосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных.

© Шляхин Д.А., Савинова Е.В., Юрин В.А., 2022

Статья: поступила: 18.01.2022; рецензия: 24.01.2022; финансирование: Самарский государственный технический университет.

Для более качественной оценки нестационарных процессов в конструкциях конечной жесткости возникает необходимость построения аналитических решений в трехмерной постановке. Однако проблема интегрирования исходных расчетных соотношений требует исследования статических задач или анализа связанных полей в неограниченных телах. В частности, в статьях [14, 18] построено аналитическое решение осесимметричной статической задачи для радиально поляризованной изотропной пьезокерамической полой сферы и сферической оболочки в случае действия температурного градиента. Ранее был проведен анализ работы анизотропных цилиндров, подверженных температурным и механическим нагрузкам [20]. Позднее получено решение статической задачи термоэластостатики для трансверсально-изотропного пространства [15]. Рассматривались динамические задачи для однородного и неоднородного пьезокерамических слоев [2, 3]. Также объектом исследования являлись неограниченная среда [1, 16, 19] и связанные нестационарные поля в длинном пьезокерамическом цилиндре [12].

Целью настоящей работы является построение замкнутого решения задачи термоэластостатики для жестко закрепленной круглой пластины с учетом связанности электрических и упругих полей при действии внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки.

Постановка задачи

Пусть жестко закрепленная сплошная круглая пьезокерамическая пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. Рассматривается случай действия на ее лицевых поверхностях нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры $\omega_1^*(t_*)$, $\omega_2^*(t_*)$ соответственно при $z_* = 0, h^*$ (граничные условия 1-го рода). Лицевые электродированные поверхности пластины подключены к измерительному прибору (рис. 1).

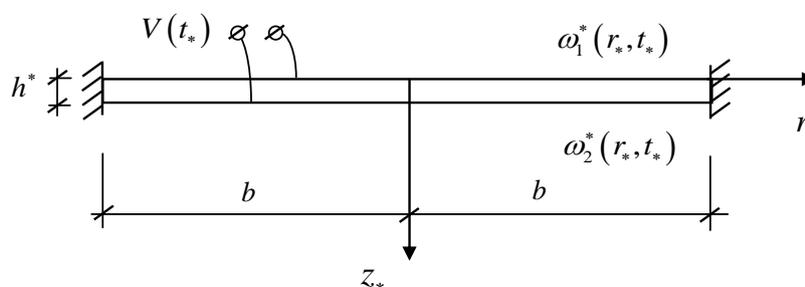


Рис. 1. Расчетная схема

В общем случае дифференциальные уравнения движения, электростатики, теплового баланса на основании гиперболической зависимости Лорда–Шульмана и краевые условия в цилиндрической системе координат в безразмерной форме имеют вид [6, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[a_{14} \Theta + a_{15} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{16} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;$$

$$r = 0, 1 \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \frac{\partial \Theta}{\partial r}|_{r=1} = 0, \{U, W\}_{|r=1} = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + a_{12} \Theta = 0;$$

$$z = 0, h \ a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta = 0, \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \Theta|_{z=0} = \omega_1, \Theta|_{z=h} = \omega_2;$$

$$t = 0 \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \frac{\partial \{U, W, \phi\}}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{t=0} = \dot{\Theta}_0, \quad (4)$$

где $\{U, W, h, r, z\} = \{U^*, W^*, h^*, r_*, z_*\} / b$, $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\omega_2^* - T_0)\}$,

$$\phi = \frac{e_{31}}{C_{11} b} \phi^*, \{t, \beta\} = \frac{\{t_*, \beta_{rel}\}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}},$$

$$a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}}, a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, a_9 = \frac{e_{31} (e_{15} + e_{31})}{C_{11} \varepsilon_{11}},$$

$$a_{10} = \frac{e_{15} e_{31}}{C_{11} \varepsilon_{11}}, a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, a_{12} = \frac{g_{11} e_{31}}{\gamma_{11} \varepsilon_{11}}, a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}},$$

$$a_{14} = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, a_{15} = T_0 \frac{b \gamma_{11} \gamma_{33}}{\Lambda \sqrt{C_{11} \rho}}, a_{16} = T_0 b \frac{g_{33} \gamma_{11}}{a_{31} \Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, a_{17} = a_2 - a_1, \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$, $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме; t_* – время в размерной форме; $\Theta^* = T - T_0$; T, T_0 – соответственно текущая температура и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения; C_{ms} , e_{ms} , ε_{11} , ε_{33} – модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала ($m, s = \overline{1, 5}$); γ_{11}, γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = C_{13} \alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33} \alpha_t$); Λ, k, α_t – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; g_{11}, g_{33} – компоненты тензора пироккоэффициентов; β_{rel} – время релаксации; $\dot{\Theta}_0$ – известная в начальный момент времени скорость изменения температуры в пластине.

Неравенства (2) при $r = 0$ учитывают регулярность решения в центре пластины, а оставшиеся выражения при $r = 1$ – теплоизоляцию ее цилиндрической поверхности, условие закрепления и отсутствия радиальной компоненты индукции электрического поля при аксиальной поляризации материала.

Равенства (3) удовлетворяют условия отсутствия механических нормальных и касательных напряжений, подключение электродированных эквипотенциальных поверхностей к измерительному прибору и действию температурной внешней нагрузки.

Проблема интегрирования несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1) и удовлетворение начально-краевых условий (2)–(4) приводят к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается уравнение теплопроводности с соответствующими краевыми условиями:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - a_{14} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \right) = 0; \quad (5)$$

$$r = 0, 1 \quad \Theta(0, z, t) < \infty, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0; \quad (6)$$

$$z = 0, h \quad \Theta(r, 0, t) = \omega_1, \quad \Theta(r, h, t) = \omega_2; \quad (7)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Theta}_0 \quad (8)$$

На следующем этапе рассматривается задача теории электроупругости относительно компонент вектора перемещений U, W и потенциала электрического поля ϕ с учетом заданной (определенной) функцией температуры Θ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (9)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -a_{12} \nabla \Theta - a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z};$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi\} \Big|_{r=0} < \infty, \quad \{U, W\} \Big|_{r=1} = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -a_{12} \Theta;$$

$$z = 0, h \quad a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} = a_7 \Theta, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0; \quad (11)$$

$$t = 0 \quad \{U, W\} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

Решение задачи теплопроводности

Для решения краевой задачи (5)–(8) первоначально применяется конечное интегральное преобразование Ханкеля [10]:

$$R_H(n, z, t) = \int_0^1 \Theta(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (13)$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_H(n, z, t) J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2}, \quad (14)$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$ ($n = 0, j_0 = 0$), $J_0(\dots), J_1(\dots)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков.

В результате получается новая задача относительно трансформанты R_H :

$$-j_n^2 R_H + \frac{\partial^2 R_H}{\partial z^2} - a_{14} \left(\frac{\partial R_H}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 R_H}{\partial t^2} \right) = 0 ; \quad (15)$$

$$z = 0, h \quad R_H(n, 0, t) = p_{1H}(n, t), \quad R_H(n, h, t) = p_{2H}(n, t) ; \quad (16)$$

$$t = 0 \quad R_H(n, z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial R_H(n, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{R}_{0H}(n, z) ; \quad (17)$$

$$\text{Здесь } \{p_{1H}, p_{2H}, \dot{R}_{0H}\} = \int_0^1 \{\omega_1, \omega_2, \dot{\Theta}_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

Использование новой функции $T_H(n, z, t)$, связанной с $R_H(n, z, t)$:

$$R_H(n, z, t) = f_1(z) p_{1H}(n, t) + f_2(z) p_{2H}(n, t) + T_H(n, z, t), \quad (18)$$

при удовлетворении условий:

$$f_1(0) = f_2(h) = 1, \quad f_1(h) = f_2(0) = 0 \quad (19)$$

позволяет сформулировать краевую задачу для функции T_H с однородными граничными условиями. При этом уравнение (15) становится неоднородным с правой частью F_H , а начальные условия (17) следует заменить на T_{0H}, \dot{T}_{0H} :

$$F_H = \left[j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{14} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] [f_1(z) p_{1H}(n, t) + f_2(z) p_{2H}(n, t)],$$

$$T_{0H} = -f_1(z) p_{1H}(n, 0) - f_2(z) p_{2H}(n, 0),$$

$$\dot{T}_{0H} = \dot{R}_{0H}(n, z) - \left. \frac{\partial}{\partial t} [f_1(z) p_{1H}(n, t) + f_2(z) p_{2H}(n, t)] \right|_{t=0},$$

$f_1(z), f_2(z)$ – дважды дифференцируемые функции.

Применяя к (15)–(17) относительно функции T_H конечные \sin -преобразования Фурье по переменной z [10]:

$$L_H(n, m, t) = \int_0^h T_H(n, z, t) \sin(\lambda_m z) dz ; \quad (20)$$

$$T_H(n, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{h}, \quad (21)$$

получаем следующую задачу относительно трансформанты L_H :

$$a_{14} \left(\frac{\partial T_H}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 T_H}{\partial t^2} \right) + (j_n^2 + \lambda_{in}^2) T_H = B_H ; \quad (22)$$

$$t = 0 \quad T_H(n, m, 0) = L_{0H}, \quad \left. \frac{\partial T_H(n, m, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{L}_{0H}, \quad (23)$$

решение которой имеет вид:

$$L_H = (A_1 - A_2)^{-1} \left\{ (\dot{L}_{H0} - A_2 L_{H0}) \exp(A_1 t) - (\dot{L}_{H0} - A_1 L_{H0}) \exp(A_2 t) + \beta^{-1} \int_0^t B_H(\tau) [\exp(A_1(t-\tau)) - \exp(A_2(t-\tau))] d\tau \right\}, \quad (24)$$

где $A_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4b_1\beta}}{2\beta}$, $b_1 = a_{14}^{-1}(\lambda_m^2 + j_n^2)$, $B_H = -a_{14}^{-1} \int_0^h F_H \sin(\lambda_m z) dz$,

$$L_{0H} = \int_0^h T_{0H} \sin(\lambda_m z) dz, \dot{L}_{0H} = \int_0^h \dot{T}_{0H} \sin(\lambda_m z) dz.$$

Выражение для $\Theta(r, z, t)$ при использовании формул обращения (21), (14) с учетом (18) имеет вид:

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[f_1(z) p_{1H} + f_2(z) p_{2H} + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z) \right] \quad (25)$$

Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ определяются при решении следующих уравнений:

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} - j_n^2 f_k(z) = 0, \quad (26)$$

что позволяет существенно упростить функцию F_H .

В результате с учетом граничных условий (19) имеем

$$f_1(z) = \frac{\text{sh}[j_n(h-z)]}{\text{sh}(j_n h)}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sh}(j_n z)}{\text{sh}(j_n h)}.$$

Полученная зависимость распределения температурного поля в виде замкнутого решения (25) позволяет перейти к решению связанной задачи электроупругости.

Решение задачи электроупругости

Краевая задача (9)–(12) решается с помощью метода конечных интегральных преобразований Ханкеля [10] и обобщенного интегрального преобразования (КИП) [9].

Алгоритмы преобразований позволяют удовлетворить только смешанные однородные граничные условия. Для этого равенство $W(1, z, t) = 0$ (10) заменяется условием наличия касательных напряжений $P_1(z, t)$ на цилиндрической поверхности пластины:

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = C_{55} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + C_{11} \frac{e_{15}}{e_{31}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = P_1, \quad (27)$$

и вводятся новые функции $w(r, z, t)$, $\chi(r, z, t)$, связанные с $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$ соотношениями:

$$\begin{aligned} W(r, z, t) &= H_1(r, z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \\ \phi(r, z, t) &= H_2(r, z, t) + \chi(r, z, t), \end{aligned} \quad (28)$$

где $H_1(r, z, t) = f_3(r) P_1(z, t) + f_4(r) \Theta(1, z, t)$, $H_2(r, z, t) = f_5(r) P_1(z, t) + f_6(r) \Theta(1, z, t)$, $f_3(r) \dots f_6(r)$ – дважды дифференцируемые функции $P_1(z, t)$, $W_1(t)$ – функции, определяемые в процессе решения задачи, позволяющие удовлетворить условие $W(1, z, t) = 0$.

В результате подстановки (28) в (9)–(12), (27) при выполнении условий

$$r=1 \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{a_5}{a_1} \frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{P_1}{C_{55}}, \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_{10} \frac{\partial H_1}{\partial r} = a_{12} \Theta|_{r=1} \quad (29)$$

получаем новую краевую задачу относительно функций $U(r, z, t), w(r, z, t), \chi(r, z, t)$. При этом дифференциальные уравнения (9), граничные условия (11) и начальные условия относительно $w(r, z, t)$ становятся неоднородными с правыми частями $F_1 \dots F_3, B_1 \dots B_3, w_0, \dot{w}_0$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \Theta}{\partial r} - a_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial r \partial z} - a_3 \frac{\partial^2 H_2}{\partial r \partial z}, B_1 = a_7 \Theta - a_4 \frac{\partial H_1}{\partial z} - a_6 \frac{\partial H_2}{\partial z}, B_2 = -\frac{\partial H_1}{\partial r}, \\ F_2 &= a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - \left(a_1 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_1 - \left(a_5 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_2, \\ F_3 &= -a_{12} \nabla \Theta - a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - a_{10} \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_{11} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_8 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, B_3 = -\frac{\partial H_2}{\partial r}, \\ w_0 &= -H_1, \dot{w}_0 = -\frac{\partial H_1}{\partial t} |_{t=0}. \end{aligned}$$

В результате применения к краевой задаче относительно U, w, χ преобразования Ханкеля [10]

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, w_H(n, z, t) = \int_0^1 w(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (30)$$

$$\chi_H(n, z, t) = \int_0^1 \chi(r, z, t) r J_0(j_n r) dr;$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad (31)$$

$$\chi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r)$$

получаем краевую задачу в области изображений:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial \chi_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = F_{1H}, \quad (32)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \chi_H + a_6 \frac{\partial^2 \chi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = F_{2H},$$

$$j_n^2 \chi_H - a_8 \frac{\partial^2 \chi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} = F_{3H}.$$

$$z=0, h \quad a_{17} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \chi_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad (33)$$

$$-j_n w_H + \frac{\partial u_H}{\partial z} = B_{2H}, \quad -j_n \chi_H = B_{3H};$$

$$t = 0 \quad u_H = 0, w_H = w_{0H}, \frac{\partial u_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial w_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_{0H}, \quad (34)$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n) (n = \overline{0, \infty}; j_0 = 0)$,

$$\{F_{1H}, B_{2H}, B_{3H}\} = \int_0^1 \{F_1, B_2, B_3\} r J_1(j_n r) dr,$$

$$\{F_{2H}, F_{3H}, B_{1H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{F_2, F_3, B_1, w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

Введение новых функций U_H, W_H, ϕ_H , связанных с u_H, w_H, χ_H соотношениями:

$$u_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + U_H(n, z, t),$$

$$w_H(n, z, t) = H_4(n, z, t) + W_H(n, z, t),$$

$$\chi_H(n, z, t) = H_5(n, z, t) + \phi_H(n, z, t), \quad (35)$$

позволяет привести граничные условия (33) к однородным.

$$\text{Здесь } H_3(n, z, t) = f_7(z)B_{2H|z=0} + f_9(z)B_{2H|z=h} + f_{11}(z)B_{4H|z=0} + f_{13}(z)B_{4H|z=h},$$

$$H_4(n, z, t) = f_8(z)B_{2H|z=0} + f_{10}(z)B_{2H|z=h} + f_{12}(z)B_{4H|z=0} + f_{14}(z)B_{4H|z=h},$$

$$H_5(n, z, t) = f_{15}(z)B_{3H|z=0} + f_{16}(z)B_{3H|z=h}, \quad B_{4H} = B_{1H} - a_6 \frac{\partial B_{3H}}{\partial z},$$

$f_7(z) \dots f_{16}(z)$ – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (35) в (32)–(34) при введении дополнительных ограничений на функции

$$H_3(n, z, t), H_4(n, z, t), H_5(n, z, t):$$

$$z = 0, h \quad a_{17} j_n H_3 + a_4 \frac{\partial H_4}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_5}{\partial z} = B_{4H}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4 = B_{2H}, \quad j_n H_5 = -B_{3H} \quad (36)$$

приводит к краевой задаче для функций U_H, W_H, ϕ_H с однородными граничными условиями.

Здесь правые части дифференциальных уравнений следует заменить на $R_{1H} \dots R_{3H}$, а начальные условия – на $U_{0H}, \dot{U}_{0H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H}$:

$$R_{1H} = F_{1H} - \left[-j_n^2 H_3 + a_1 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_4}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_5}{\partial z} - \frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2} \right],$$

$$R_{2H} = F_{2H} - \left[-a_1 j_n^2 H_4 + a_4 \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_5 j_n^2 H_5 + a_6 \frac{\partial^2 H_5}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_4}{\partial t^2} \right],$$

$$R_{3H} = F_{3H} - \left[j_n^2 H_5 - a_8 \frac{\partial^2 H_5}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_{10} j_n^2 H_4 + a_{11} \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} \right],$$

$$U_{0H} = -H_{3|t=0}, \quad W_{0H} = w_{0H} - H_{4|t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = -\frac{\partial H_3}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \frac{\partial H_4}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

Краевая задача относительно U_H, W_H, ϕ_H решается обобщенным методом конечных интегральных преобразований с неизвестными компонентами вектор-функции ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$ и весовыми коэффициентами α, β, γ [9]:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h [U_H(n, z, t)\alpha K_1(\lambda_{in}, z) + W_H(n, z, t)\beta K_2(\lambda_{in}, z)] dz,$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{\{K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h [\alpha K_1^2(\lambda_{in}, z) + \beta K_2^2(\lambda_{in}, z)] dz,$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счетное множество ($i = \overline{1, \infty}$).

В результате использования алгоритма преобразований формируются задачи относительно трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$ и компонент вектор-функции ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$. Алгоритм решения задачи относительно данных задач представлен в работе [11].

Окончательные выражения для функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$ имеют вид:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{K_1(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right], \quad (38)$$

$$W(r, z, t) = H_1(r, z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{K_2(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = H_2(r, z, t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_5(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{K_3(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right].$$

Для определения $H_1 \dots H_5, W_1, P_1$ первоначально рассматривается случай действия только температурной нагрузки $\Theta, \omega_1, \omega_2$. Тогда $H_1 \dots H_5$ определяются из условия упрощения правых частей соответствующих неоднородных уравнений ($F_1, F_2, R_{1H}, R_{2H}, R_{3H}$) при удовлетворении условий (29), (36).

Функция $W_1(t)$ вычисляется из условия закрепления нижней цилиндрической поверхности пластины ($W(1, h, t) = 0$):

$$W_1(t) = -H_1(1, h, t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0(j_n)} \left[H_4(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{K_2(\lambda_{in}, h)}{\|K_{in}\|^2} \right].$$

На следующем этапе решения рассматривается случай действия касательных напряжений $P_1(z, t)$ ($\Theta = \omega_1 = \omega_2 = 0$). Функция $P_1(z, t)$ представляется, с учетом парности касательных напряжений и равновесия пластины, в следующем виде:

$$P_1(z, t) = S_0 W_1(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right),$$

что позволяет определить $H_1 \dots H_5$ также из условия упрощения правых частей соответствующих уравнений.

Сумма двух результатов расчета позволяет определить постоянную S_0 из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений цилиндрической поверхности пластины:

$$\int_0^h W(1, z, t_{\max}) dz = 0.$$

Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается круглая пластина ($b = 0.014$ м), изготовленная из аксиально поляризованной пьезокерамики PZT-4, имеющей следующие физико-механические характеристики:

$$\{C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{55}\} = \{13.9, 7.43, 11.5, 2.56\} \times 10^{10} \text{ Па}, \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6.45, 5.62\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м},$$

$$\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12.7, -5.2, 15.1\} \text{ Кл/м}^2, \rho = 7500 \text{ кг/м}^3, k = 3 \times 10^6 \text{ Дж/(м}^3\text{К)},$$

$$\Lambda = 1.6 \text{ Вт/(м К)}, \alpha_t = 0.4 \times 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \{g_{11}, g_{33}\} = \{-0.3, -0.6\} \times 10^{-6} \text{ Кл/(м}^2\text{ К)}, \beta_{rel} = 5 \times 10^{-5} \text{ с}.$$

Рассматривается случай действия на верхней лицевой поверхности ($z_* = 0$) температурной нагрузки:

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[\sin(\theta t_*) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \omega_2^*(r_*, t_*) = 0,$$

где $H(\tilde{t})$ – единичная функция Хевисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$), T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373 \text{ }^0\text{K}$ ($100 \text{ }^0\text{C}$), $T_0 = 293 \text{ }^0\text{K}$, ($20 \text{ }^0\text{C}$), $t_{\max}^* = 1$ с), $\theta = \pi / (2t_{\max}^*)$.

Полученные расчетные соотношения позволяют определить все компоненты термоэлектроупругого поля. Ниже ограничимся только численными результатами, которые позволяют в дальнейших работах авторов с некоторыми упрощениями построить в общем виде решение связанной задачи (1)–(4).

Показаны графики изменения температуры $\Theta^*(0, z, t_*)$ по высоте пластины h^* с учетом (сплошная линия) и без учета ($\beta_{rel} = 0$, пунктирная линия) релаксации температурного потока в цилиндре (рис. 2).

На рисунке цифрами 1, 2 обозначены результаты соответственно для времени $t_* = t_{\max}^*$, $10t_{\max}^*$.

Результаты расчета позволяют сделать следующие выводы:

- в рассматриваемом диапазоне изменения толщины пластины учет релаксации теплового потока приводит к снижению температуры во время ее прогрева (рис. 2, графики 1);
- при установившемся температурном режиме, а также в пластинах меньшей толщины результаты, полученные с помощью гиперболической и параболической ($\beta_{rel} = 0$) теорий, совпадают (рис. 2, график 2).

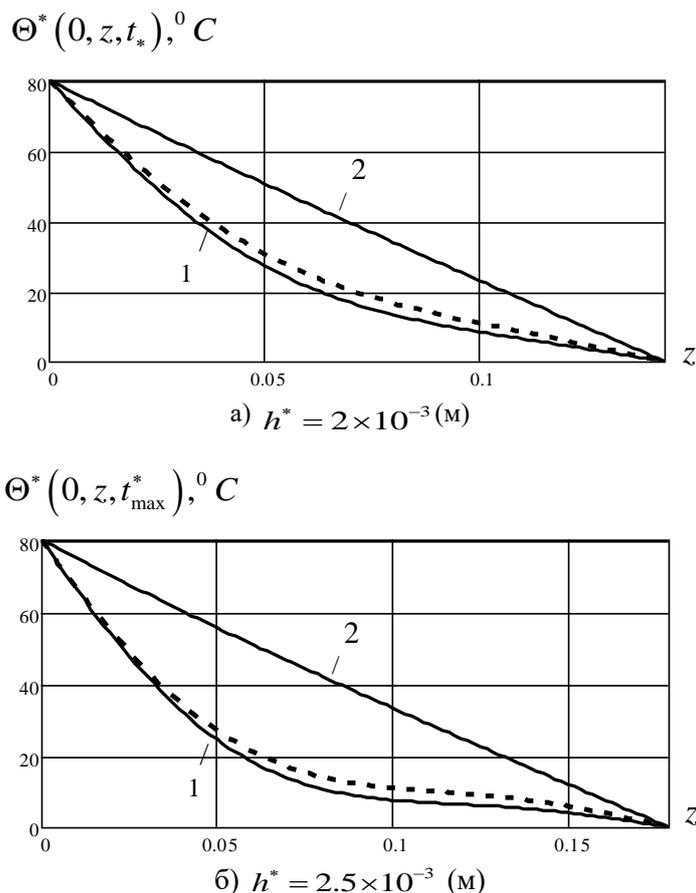


Рис. 2. Графики изменения $\Theta^*(0, z, t_*)$ по высоте пластины h ($h = h^* / b$) (сплошная линия – $\beta_{rel} = 5 \times 10^{-5}$ (с), пунктирная линия – $\beta_{rel} = 0$, $1-t_* = t_{max}^*$, $2-t_* = 10t_{max}^*$)

Для оценки влияния инерционной составляющей упругой системы на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкции используются результаты расчета задачи электроупругости [20], позволяющие сделать вывод, что при гармоническом воздействии силы инерции необходимо учитывать при следующем соотношении частоты вынужденных колебаний θ и первой частоты собственных колебаний Ψ ($\psi = \frac{\lambda_{11}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$): $\frac{\theta}{\psi} \geq 0.5$.

В результате получается следующая зависимость между t_{max}^* и Ψ , при которой необходимо учитывать инерционные характеристики упругой системы:

$$t_{max}^* \leq \frac{\pi}{\Psi}. \tag{38}$$

На рисунке 3 представлены результаты, по которым можно для произвольной толщины пластины определить время достижения нагрузки максимального значения t_{max}^* ($T_{max}^* = 373 \text{ K}$ ($100 \text{ } ^\circ\text{C}$)), когда в расчетах необходимо учитывать инерционные характеристики упругой системы (заштрихованная часть графика). Сплошной и пунктирной линиями обозначены данные вычисления, полученные с учетом связанности электроупругих полей и без учета электрического поля.

Анализ неравенства (39) и численных результатов расчета (см. рис. 3) позволяют сделать вывод, что увеличение толщины пластины приводит к увеличению ее жесткости и частоты собственных колебаний Ψ , что позволяет уменьшить предельное значение времени

t_{\max}^* . Здесь необходимо отметить, что учет электрического поля приводит к увеличению Ψ на 3–5%.

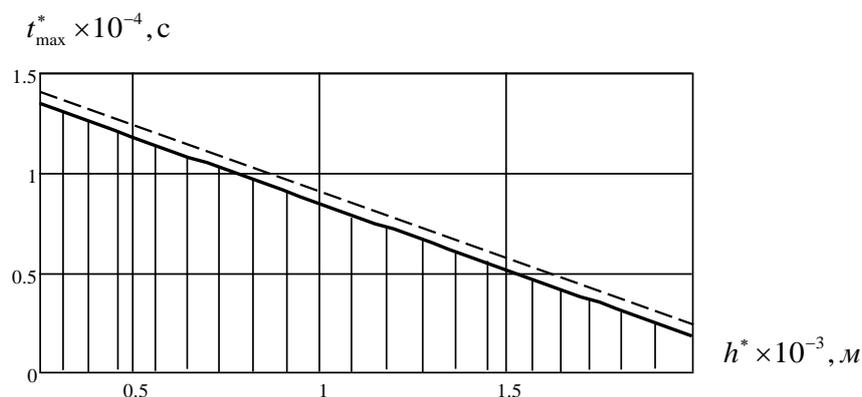


Рис. 3. Зависимость " $t_{\max}^* - h^*$ "

Приведенные результаты (см. рис. 3) позволяют, при соответствующих ограничениях по скорости изменения температурной нагрузки, в расчетах вместо уравнений движений использовать уравнения равновесия, существенно упрощающие исходные расчетные соотношения.

Выводы

Полученные в работе результаты динамического расчета позволяют определить напряженно-деформированное состояние, температурное и электрическое поля в жестко закрепленной пьезокерамической пластине. Использование гиперболической теории теплопроводности дает возможность уточнить величину температурного поля в пластине при относительной толщине $h \geq 0.1$. Установлена зависимость между геометрическими размерами упругой системы и скоростью изменения температуры, при которой необходимо учитывать ее инерционные характеристики.

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ватульян А.О, Кирютенко А.Ю., Федорова В.В. Задача Даниловской в термоэлектродупругости // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. 1997. № 2. С. 25–30.
2. Ватульян А.О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектродупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 117–126. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10
3. Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектродупругому слою // Вестник ДГТУ. 2001. Т. 1(7), № 1. С. 82–89.
4. Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // Датчики и системы. 2009. № 2. С. 9–12.
5. Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы. 2016. № 3(201). С. 50–56.
6. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 307 с.
7. Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектродлюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 72–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.07
8. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электродупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 470 с.

9. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 174 с.
10. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
11. Шляхин Д. А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 4. С. 90–100.
12. Шляхин Д. А. Кальмова М. А. Нестационарная задача термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 2. С. 181–190. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16.
13. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля / под общ. ред. И.Н. Ермолова. Москва: Машиностроение, 1986. 280 с.
14. Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell. *J. Thermal Stress*. 2001;(24):105-120.
15. Kaczyński A. On 3rd anticrack problem of thermoelectroelasticity. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018;12(2):109-114. DOI: 10.2478/ama-2018-0018
16. Kirilyuk V.S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load. *International Applied Mechanics*. 2008;44(3):320-330.
17. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Struct.* 1974;10(6):625-637.
18. Saadatfar M., Rastgoo A. Stress in piezoelectric hollow sphere with thermal gradient. *J. of Mechanical Science and Technology*. 2008;22:1460-1467.
19. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2003;40(3):237-246.
20. Tarn J.Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. *Int. J. Solids Structure*. 2001;(38):8189-8206.

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2022. N 1/50

Mechanics of Deformable Solids

www.dvfu.ru/en/vestnikis

Original article

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>

Shlyakhin D., Savinova E., Yurin V.

DMITRY A. SHLYAKHIN, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor,

Head of the Department, d-612-mit2009@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

ELENA V. SAVINOVA, Senior Lecturer, slenax@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-7155-2281>

VLADIMIR A. YURIN, Engineer, smsm@samgtu.ru

Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations

Architecture and Civil Engineering Academy

Samara State Technical University

Samara, Russia

Dynamic problem of thermoelectricity for round rigidly fixed plate

Abstract: A new closed solution of a dynamic axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a round rigidly fixed piezoceramic plate in the case of a temperature load acting on its front surfaces (boundary conditions of the 1st kind) is constructed. The temperature field in the structure is determined based on Lord–Schulman's hyperbolic heat conduction theory, followed by the study of the relevant electroelasticity problem. The design ratio obtained by the method of incomplete separation of variables in the form of finite integral transformations make it possible to determine the temperature and the stress-strain state of the plate in the case of a non-stationary load. The special aspects of the use of the hyperbolic heat conduction theory in piezoceramic

plates, as well as the need to consider the inertial properties of an elastic system of various thicknesses, are analyzed.

Keywords: problem of thermoelectroelasticity, piezoceramic round plate, dynamic load, finite integral transformations

For citation: Shlyakhin D., Savinova E., Yurin V. Dynamic problem of thermoelectricity for round rigidly fixed plate. FEFU: School of Engineering Bulletin. 2022;(50):3-16. (In Russ.). <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article

The authors declare no conflict of interests.

REFERENCES

1. Vatulyan A.O., Kiryutenko A.Yu., Fedorova V.V. Danilovskaya's task in thermoelectric insulation-guests. *Integro-differential operators and their applications*. 1997;(2):25-30.
2. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Dynamic problem of thermoelectromagnetic for the functionally graded layer. *Computational mechanics of continuous media*. 2017;10(2):117-126. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10
3. Vatulyan A.O. Thermal impact termoelektrarna layer. *Bulletin of the DSTU*. 2001;1(1):82-89.
4. Ionov B.P., Ionov A.B. Spectral-statistical approach to contactless temperature measurement. *Sensors and systems*. 2009;(2):9-12.
5. Kazaryan A.A. Fine-film captive pressure and temperature. *Sensors & systems*. 2016;(3):50-56.
6. Kovalenko A.D. *Fundamentals of thermoelasticity*. Kiev, Nauk. dumka, 1970. 307 p.
7. Pankov A.A. Resonant diagnostics of temperature distribution by a piezoelectrolyuminous fiber-optic sensor according to the solution of the Fred-golm integral equation. *Bulletin of the Perm National Research Poly-Technical University. Mechanics*. 2018;(2):72-82. DOI: 10.15593/perm.mechanics/2018.2.07
8. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Electroelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies*. Moscow, Nauka, 1988. 470 p.
9. Senitsky Yu.E. *Investigation of elastic deformation of structural elements under dynamic influences by the method of finite integral transformations*. Saratov, Publishing House of Saratov University, 1985. 174 p.
10. Sneddon I.N. *Fourier transforms*. Moscow, Publishing House of Foreign Lit., 1955. 668 p.
11. Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric oscillations of a thick round rigidly fixed piezoceramic plate. *Izvestiya Rossiyskoy akad-mii nauk. Solid state mechanics*. 2014;(4):90-100.
12. Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Nonstationary thermoelectroelasticity problem for a long piezoceramic cylinder. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2021;(2):181-190. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16
13. *Ultrasonic transducers for non-destructive testing / I.N. Ermolov (ed.)*. Moscow, Mashinostroenie, 1986. 280 p.
14. Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shel. *J. Thermal Stress*. 2001;(24):105-120.
15. Kaczyński A. On 3rd anticrack problem of thermoelectroelasticity. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018;12(2):109-114. DOI: 10.2478/ama-2018-0018
16. Kirilyuk V.S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load. *International Applied Mechanics*. 2008;44(3):320-330.
17. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Struct.* 1974;10(6):625-637.
18. Saadatfar M., Rastgoo A. Stress in piezoelectric hollow sphere with thermal gradient. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2008;22:1460-1467.
19. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2003;40(3):237-246.
20. Tarn J.Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. *Int. J. Solids Structure*. 2001;(38):8189-8206.