

**Механика деформированного твердого тела**

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2023-4/101-111>

И.К. Андрианов, С.И. Феоктистов, Тхен Лин

АНДРИАНОВ ИВАН КОНСТАНТИНОВИЧ – к.т.н., доцент кафедры «Авиастроение»,  
ivan\_andrianov\_90@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8732-9615>ФЕОКТИСТОВ СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ – д.т.н., профессор, главный научный сотрудник,  
serg\_feo@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8684-7541>ТХЕТ ЛИН – аспирант, [linhtetnaining513028@gmail.ru](mailto:linhtetnaining513028@gmail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6878-0718>*Комсомольский-на-Амуре государственный университет*

Комсомольск-на-Амуре, Россия

**Оценка погрешности определения остаточных напряжений при упругопластическом нагружении толстостенных сферических оболочек при линейном упрочнении материала**

**Аннотация.** В статье рассмотрена проблема оценки остаточных напряжений в толстостенных сферических оболочках, находящихся под внутренним давлением, при упругопластическом деформировании. Математическая модель упругопластического деформирования сферической оболочки строилась с применением положений деформационной теории пластичности. Новизна исследования обусловлена учетом сжимаемости материала и изменения геометрии оболочки в процессе нагружения при определении остаточных напряжений. Для кусочно-линейной модели материала представлены результаты расчета остаточных напряжений с помощью аналитических формул при использовании принципа «отвердевания» и метода переменных параметров упругости при изменении геометрии оболочки в процессе нагружения. Согласно результатам оценки решений, полученным аналитически и численно, с увеличением толщины стенки сферической оболочки и показателя упрочнения материала относительная погрешность расчета остаточных напряжений возрастает.

**Ключевые слова:** остаточные напряжения, толстостенная оболочка, пластичность, принцип отвердевания, геометрическая нелинейность

**Для цитирования:** Андрианов И.К., Феоктистов С.И., Тхет Лин. Оценка погрешности определения остаточных напряжений при упругопластическом нагружении толстостенных сферических оболочек при линейном упрочнении материала // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2023. № 4(57). С. 101–111.

**Введение**

Современное развитие производства, направленное на повышение надежности, долговечности эксплуатируемых изделий, неразрывно связано с проблемой остаточных напряжений, которые возникают при различных технологических операциях, знакопеременном нагружении и др. Остаточные напряжения достаточно часто встречаются в деталях, элементах конструкций вследствие обработки давлением, температурных воздействий, фазовых превращений. Наличие остаточных напряжений после снятия нагрузки может привести к снижению прочности, долговечности, а также к разрушению деталей в процессе эксплуатации.

В статье рассматриваются механические остаточные напряжения, возникающие в толстостенных сферических оболочках под действием внутреннего давления. В строительстве и других производственных областях сферические оболочки часто используются в качестве

металлических резервуаров, предназначенных для хранения жидкостей и газов. Важность оценки остаточных напряжений обусловлена тем, что достаточно много деталей оболочечного типа подвергаются автофретированию. В связи с этим определение остаточных напряжений при знакопеременном нагружении является актуальной задачей.

Научная значимость описанной проблемы подтверждается рядом исследований, посвященных вопросу определения остаточных напряжений. Проблемы, связанные с образованием остаточных напряжений, их влияние на прочность, а также инженерные методы их оценки исследованы И.А. Биргером [1]. Методы оценки напряженно-деформированного состояния тел при многократных, знакопеременных нагружениях разрабатывались В.В. Москвитиним [2]. Особенности перераспределения остаточных напряжений при циклическом нагружении рассмотрены в работе [3]. Согласно исследованию [4] авторы отмечают влияние выбора закона деформационного упрочнения на точность и достоверность при определении остаточных напряжений. Кроме того, большое количество теоретических исследований методов математического моделирования остаточных напряжений посвящено вопросам, связанным с термообработкой и ползучестью [5–7].

Сегодня одним из направлений оценки остаточных напряжений и деформаций является их опытное определение методами неразрушающего контроля [8], методом дифракции [9]. Также проблема экспериментального определения остаточных напряжений актуальна для процессов формоизменения. Исследователями предложен метод обрезки колец на примере формоизменения усеченного конуса [10], представлен анализ остаточных напряжений в сварных соединениях [11], рассмотрены вопросы разработки методов и моделей расчета остаточных напряжений [12–14].

В прикладных исследованиях при анализе напряженно-деформированного состояния тел, в том числе при оценке остаточных напряжений, широко применяется принцип «отвердевания». Однако в результате разгрузки происходит остаточное формоизменение тел, которое данный принцип не позволяет учитывать. Соответственно возникает проблема оценки остаточных напряжений в условиях остаточного формоизменения и, следовательно, отказа от принципа «отвердевания».

Таким образом, цель исследования заключалась в оценке погрешности расчета остаточных напряжений в толстостенной сферической оболочке под внутренним давлением в условиях изменяемой геометрии. Под остаточными напряжениями будем понимать напряжения, которые остаются в оболочке после снятия внешнего воздействия. В рамках поставленной цели требовалось решить следующие задачи:

- определить методом переменных параметров упругости остаточные напряжения в толстостенной сферической оболочке при учете геометрической нелинейности, сжимаемости материала и изменения геометрии в процессе нагружения;
- оценить погрешность применения аналитических формул при анализе остаточных напряжений в сравнении с полученными результатами для кусочно-линейной модели материала и различных толщин сферической оболочки.

### **Методика исследования**

Моделирование напряженно-деформированного состояния сферической оболочки в условиях нагружения и разгрузки проводится при следующих допущениях:

- выполняются гипотезы деформационной теории пластичности;
- в качестве меры деформации используются логарифмические деформации;
- разгрузка начинается одновременно во всех точках сферической оболочки;
- разгрузка упругая, эффект Баушингера не учитывается, то есть вторичные пластические деформации не возникают.

Согласно теореме Ильюшина [15], для нахождения остаточных напряжений необходимо решить две задачи: упругопластическую при нагружении и упругую при разгрузке.

При выполнении принципа «отвердевания» остаточные напряжения в теле будут определяться согласно формуле [15]:

$$\sigma^0 = \sigma^* - \sigma^y, \quad (1)$$

где  $\sigma^*$  – напряжения в упругопластическом теле при нагрузке,  $\sigma^y$  – напряжения в упругом теле при разгрузке.

Соответственно принцип «отвердевания» позволяет найти остаточные напряжения в теле как разность напряженных состояний упругопластического и упругого тел при одинаковом значении и одинаковом направлении действия внутреннего давления. Однако в случае отказа от принципа «отвердевания» оценка остаточных напряжений в теле изменится, поскольку в этом случае остаточные напряжения будут определяться суммированием напряженных состояний упругопластического тела при нагрузке и упругого тела измененной геометрии, нагруженного давлением, действующим в противоположном направлении.

Таким образом, при условии отказа от принципа «отвердевания» зависимость (1) для расчета остаточных напряжений примет вид:

$$\sigma^0 = \sigma^*|_{p=p^*} + \sigma^y|_{p=-p^*}, \quad (2)$$

где  $p$  – давление на внутренней поверхности оболочки,  $p^*$  – заданное значение внутреннего давления при нагружении.

Анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричной толстостенной оболочки будем проводить в сферической системе координат  $0r\theta\varphi$ . В начальном недеформированном состоянии обозначим геометрические характеристики сферической оболочки:  $r_0$  – внутренний радиус,  $R_0$  – внешний радиус. Для расчета упругопластического деформирования сферы будем использовать метод переменных параметров упругости. Тогда математическая постановка задачи исследования будет описываться следующими соотношениями [16]:

– уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi, \quad (3)$$

где  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$  – радиальные, окружные, меридиональные напряжения;

– уравнение совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_\rho)}{\rho}, \quad e_\theta = e_\varphi, \quad (4)$$

где  $e_\rho, e_\theta, e_\varphi$  – радиальные, окружные, меридиональные логарифмические деформации;

– физические уравнения согласно методу переменных параметров упругости:

$$e_\rho = \frac{1}{E^*} [\sigma_\rho - 2\mu^* \sigma_\theta], \quad e_\theta = \frac{1}{E^*} [(1 - \mu^*) \sigma_\theta - \mu^* \sigma_\rho], \quad (5)$$

где  $E^*, \mu^*$  – переменные параметры упругости:

$$E^* = \frac{E_{сек}}{1 + \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{сек}}; \quad \mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{сек}}{1 + \frac{1 - 2\mu}{3E} E_{сек}},$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $E_{сек} = \sigma_i / e_i$  – секущий модуль,  $\sigma_i, e_i$  – интенсивности напряжений и логарифмических деформаций:

$$\sigma_i = \sigma_\theta - \sigma_\rho, \quad (6)$$

$$e_i = \frac{2}{3} (e_\theta - e_\rho); \quad (7)$$

– аппроксимация диаграммы деформирования упругопластического материала с линейным упрочнением:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i, & e_i \leq e_{iT} \\ \lambda\sigma_T + 3G(1 - \lambda)e_i, & e_i > e_{iT} \end{cases} \quad (8)$$

где  $G$  – модуль упругости II рода,  $\lambda = 1 - E_T/3G$ ,  $E_T$  – модуль упрочнения,  $\sigma_T$  – предел текучести материала,  $e_{iT}$  – интенсивность логарифмических деформаций, определяющая переход материала из стадии упругости в стадию пластичности.

Ввиду геометрической изменяемости сферической оболочки граничные условия на ее внутренней и наружной поверхностях при нагружении и разгрузке будут различаться;

– граничные условия при нагружении:

$$\sigma_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad \sigma_\rho|_{\rho=r} = -p, \quad (9)$$

$$e_\theta|_{\rho=R} = \ln(R/R_0); \quad (10)$$

– граничные условия при разгрузке:

$$\sigma_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad \sigma_\rho|_{\rho=r} = p, \quad (11)$$

$$e_\theta|_{\rho=R} = \ln(R/R^*), \quad (12)$$

где  $R, r$  – наружный и внутренний радиусы сферы в процессе деформирования,  $R^*$  – наружный радиус сферы при  $p = p^*$  в случае нагружения.

На основании соотношений (4), (5), (10) и соотношений (3), (9) интегральное уравнение совместности деформаций в напряжениях и интегральное уравнение равновесия при нагружении имеют вид [16]:

$$\sigma_\theta = \frac{\mu^*}{(1 - \mu^*)} \sigma_\rho + \frac{E^*}{(1 - \mu^*)} \times \ln \left( -\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp \left( \frac{2\sigma_\theta}{E^*} - \frac{(1 + 2\mu^*)}{E^*} \sigma_\rho \right) d\rho + \rho/R_0 \right), \quad (13)$$

$$\sigma_\rho = \frac{2}{\rho^2} \int_R^\rho \rho \sigma_\theta d\rho. \quad (14)$$

Для проведения численного расчета построим сетку в радиальном направлении стенки оболочки (рис. 1):

$$\rho_i = R - i \frac{R-r}{N}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\rho_0 = R, \rho_N = r,$$

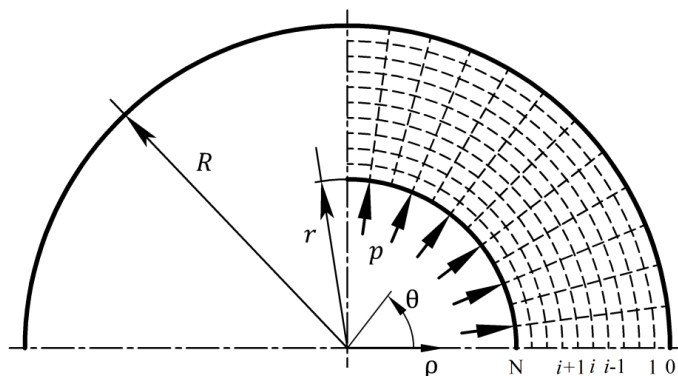


Рис. 1. Сферическая оболочка под внутренним давлением

На первом этапе исследования проводится расчет нагружения сферической оболочки. Задавая малое приращение наружной поверхности сферы  $\Delta R$ , решаем систему уравнений (6)–(10), (13), (14) согласно численной методике, представленной в работе [17, 18]. Данная методика на основании метода переменных параметров упругости позволяет на каждом приближении учитывать в уравнении равновесия текущее деформированное состояние.

В процессе нагружения наружный край сферы смещается от центра согласно схеме:

$$R^{(j+1)} = R^{(j)} + \Delta R, \quad R^{(0)} = R_0,$$

где  $j$  – номер приближения.

Численный расчет нагружения оболочки будем проводить при выполнении условия

$$\rho_T^* - \rho_T \geq 0,$$

где  $\rho_T$  – радиус поверхности, разделяющей области упругого и пластического деформирования,  $\rho_T^*$  – заданный радиус поверхности, разделяющей области упругого и пластического деформирования.

Узел сетки  $i_T$ , соответствующий переходу области упругого деформирования в пластическую, определяется соотношением

$$\rho_T^* = R - i_T \frac{R-r}{N}.$$

Тогда условие окончания итерационного процесса представим в виде

$$E_{\text{сек}_{i_T}} = E_{\text{сек}_i}: \quad E_{\text{сек}_{i+l}} < 3G, \quad l \in \mathbb{N},$$

где  $i_T = N(R - \rho_T^*) / (R - r)$ .

В конце расчета нагружения при  $p = p^*$  внешний и внутренний радиусы оболочки примут значения:  $R^*, r^*$ . Напряженное состояние в результате нагрузки будет определяться главными напряжениями:  $\sigma_\rho^*, \sigma_\theta^* = \sigma_\varphi^*$ .

На втором этапе исследования проводился расчет упругой разгрузки. В случае снятия нагрузки смещение наружного края оболочки происходит в направлении к центру сферической оболочки согласно схеме:

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} - \Delta R, \quad R^{(0)} = R^*,$$

где  $k$  – номер приближения.

Поскольку в случае разгрузки материал предполагается упругим, определяющие соотношения (5)–(7), (11)–(14) останутся прежними, однако переменные параметры примут следующие значения:  $E^* = E, \mu^* = \mu, E_{\text{сек}} = 3G$ . В конце разгрузки при  $p = -p^*$  внешний и внутренний радиусы оболочки примут значения:  $R_*, r_*$ .

Условие окончания итерационного процесса при разгрузке примет вид:

$$p^* - \sigma_\rho^y|_{i=N} \leq 0.$$

Напряженное состояние при разгрузке будет определяться значениями:  $\sigma_\rho^y, \sigma_\theta^y = \sigma_\varphi^y$ . Тогда остаточные радиальные и окружные напряжения в условиях отказа от принципа «отвердевания» будут определяться согласно (2):

$$\sigma_\rho^0 = \sigma_\rho^* + \sigma_\rho^y, \quad \sigma_\theta^0 = \sigma_\theta^* + \sigma_\theta^y. \quad (15)$$

Для оценки погрешности аналитического определения остаточных напряжений при упругопластическом нагружении толстостенных сферических оболочек будем использовать решения при линейном упрочнении материала, представленные в работе [16]. В данной работе показаны аналитические зависимости для оценки напряженного состояния толстостенной сферической оболочки в предположении принципа «отвердевания»:

– напряженное состояние сферической оболочки в пластическом состоянии при упруго-пластическом деформировании:

$$\sigma_{\rho} = -p + 2\lambda\sigma_{\tau} \ln \frac{\rho}{r_0} + 2(1 - \lambda) \frac{\sigma_{\tau} \rho^3 - r_0^3}{3 r_0^3 \rho^3} \rho_{\tau}^3, \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = \sigma_{\rho} + \lambda\sigma_{\tau} + (1 - \lambda)\sigma_{\tau} \frac{\rho_{\tau}^3}{\rho^3}; \quad (17)$$

– напряженное состояние сферической оболочки в упругом состоянии:

$$\sigma_{\rho} = \frac{pr_0^3}{R_0^3 - r_0^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{\rho} \right)^3 \right], \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = \frac{pr_0^3}{R_0^3 - r_0^3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{\rho} \right)^3 \right]. \quad (19)$$

Тогда, при учете принципа «отвердевания», остаточные напряжения в сферической оболочке, вся стенка которой перешла в область пластического деформирования, будут определяться разностью соотношений (16) и (18), (17) и (19) при  $p = p^*$ .

### Результаты исследования

При проведении серии численных экспериментов в качестве основного показателя, характеризующего уровень нагружения сферической оболочки, примем величину распространения пластической области по толщине стенки. Эту величину обозначим как  $\bar{s}_{\tau}$ , которая в долях толщины определяется по формуле

$$\bar{s}_{\tau} = \frac{\rho_{\tau} - r}{R - r}.$$

Расчеты проводились для различных относительных диаметров сферы, характеризующих толщину оболочки,  $D_{отн} = 2R_0 / (R_0 - r_0)$ : 3, 6, 10, 13. В качестве модели материала рассмотрена упругопластическая модель с линейным упрочнением при значениях:  $\lambda = 0,85$  и  $\lambda = 0,95$ , что характерно для большинства металлов.

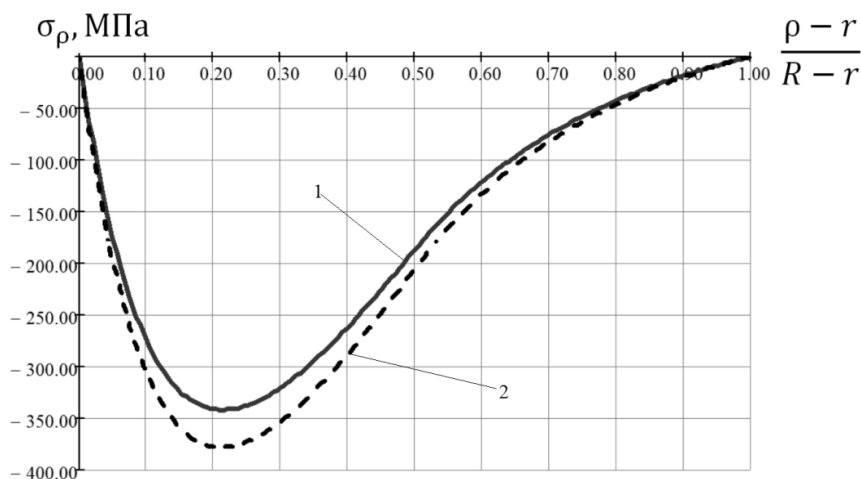
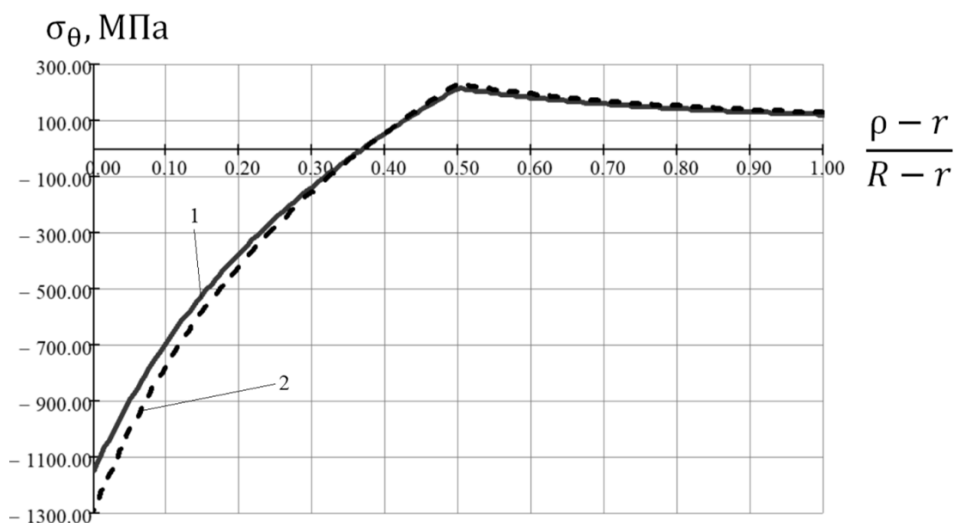


Рис. 2. Остаточные радиальные напряжения:

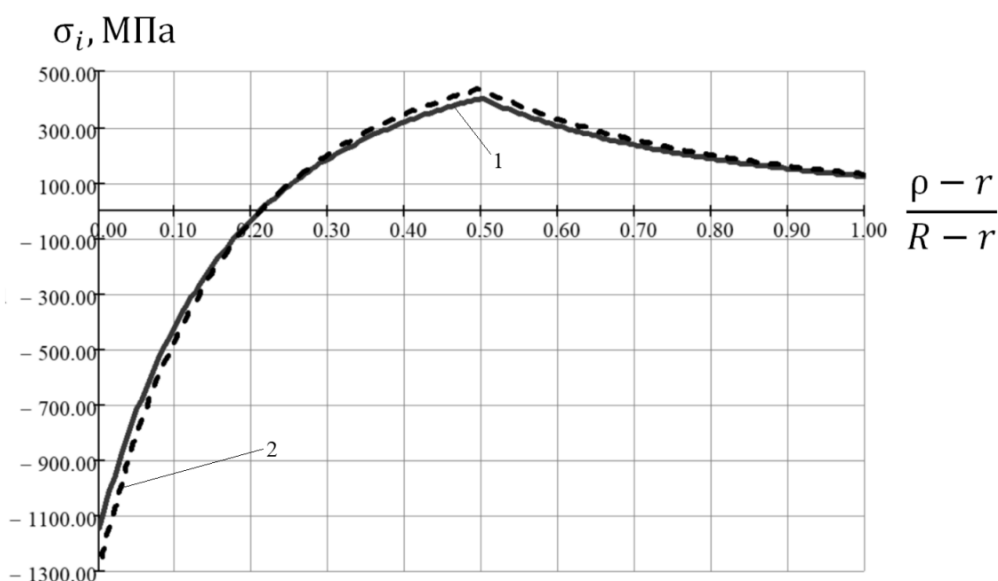
1 – расчет методом переменных параметров упругости; 2 – аналитический расчет

Представлены полученные аналитическим решением и методом переменных параметров упругости распределения остаточных радиальных, окружных напряжений и интенсивностей напряжений в толстостенной сферической оболочке при  $D_{отн} = 3$ ,  $\lambda = 0,85$ ,  $\frac{\rho_{\tau} - r}{R - r} = 0,5$  на основании формул (15) (рис. 2, 3). Согласно полученным результатам, при изменении показателя

упрочнения  $\lambda$  и относительных толщин сферической оболочки характер кривых остаточных напряжений не меняется, изменяются только их величины. Интенсивность остаточных напряжений принимает положительные и отрицательные значения, что соответствует областям растяжения и сжатия на основании физической картины деформирования (рис. 4).



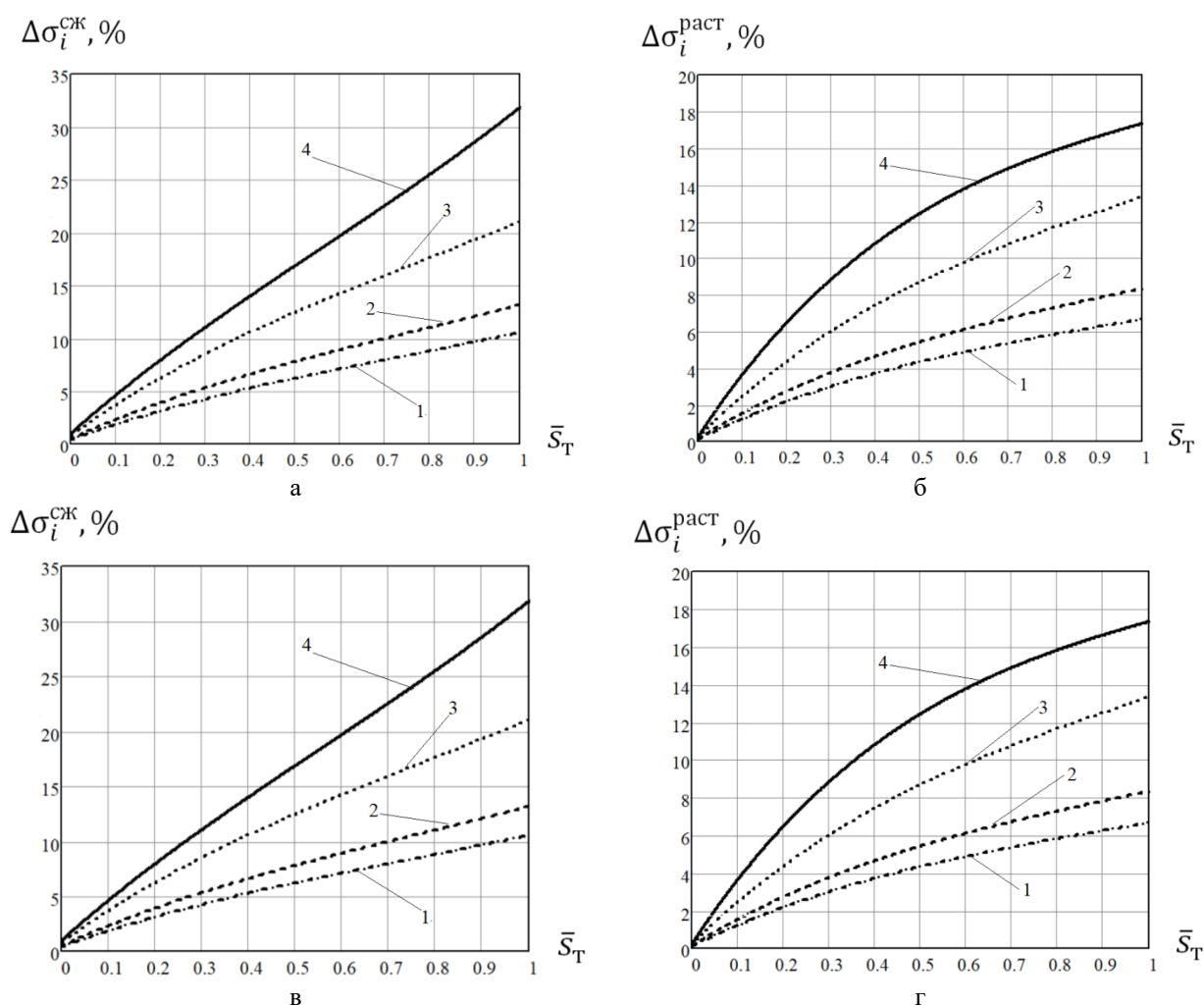
**Рис. 3. Остаточные окружные напряжения:**  
**1 – расчет методом переменных параметров упругости; 2 – аналитический расчет**



**Рис. 4. Остаточная интенсивность напряжений:**  
**1 – расчет методом переменных параметров упругости; 2 – аналитический расчет**

Для оценки погрешности расчёта остаточных напряжений, получаемой при аналитическом расчете без учёта сжимаемости материала и с использованием принципа «отвердевания», будем использовать значения максимальных погрешностей интенсивностей остаточных напряжений в области сжатия (внутренняя стенка сферической оболочки) и в области растяжения (граница разделения зоны упругого и пластического деформирования) (см. рис. 4).

На рис. 5 представлены максимальные относительные погрешности расчета интенсивностей остаточных напряжений в областях растяжения и сжатия при изменении границы разделения зоны упругого и пластического деформирования для сферических оболочек различной толщины.



**Рис. 5. Максимальные относительные погрешности расчета интенсивностей остаточных напряжений:**

**а) в области сжатия при  $\lambda = 0,85$ ; б) в области растяжения при  $\lambda = 0,85$ ;  
 в) в области сжатия при  $\lambda = 0,95$ ; г) в области растяжения  
 при  $\lambda = 0,95$  (1 –  $D_{отн} = 13$ , 2 –  $D_{отн} = 10$ , 3 –  $D_{отн} = 6$ , 4 –  $D_{отн} = 3$ )**

### Заключение

Как показывают результаты исследования, по мере распространения пластической области в стенке сферической оболочки относительная погрешность расчета интенсивности остаточных напряжений по аналитическим формулам в сравнении с расчетом методом переменных параметров упругости как в сжатой, так и растянутой области возрастает. При уменьшении относительного диаметра сферы  $D_{отн}$ , с утолщением стенки оболочки относительная погрешность расчета также повышается. Причем при увеличении показателя упрочнения  $\lambda$ , что означает уменьшение модуля упрочнения  $E_T$ , относительная погрешность расчета уменьшается. При этом для толстостенных сферических оболочек и для интенсивно упрочняющихся материалов погрешность расчета может превышать 30% в области сжатия.

Таким образом, при определении остаточных напряжений, возникающих в случае знакопеременного упругопластического нагружения, для уменьшения погрешности расчётов необходимо учитывать сжимаемость материала, изменение размеров толстостенной оболочки при нагружении и геометрическую нелинейность.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность Совету по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных и по государственной поддержке



ведущих научных школ Российской Федерации за финансовую поддержку исследования в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчёта пластического формообразования заготовок штамповочного производства».

Заявленный вклад авторов: И.К. Андрианов – постановка задачи исследования, разработка численной методики расчета, описание проведенного научного исследования и результатов; С.И. Феоктистов – разработка численной методики исследования, описание проведенного исследования, проработка заключений и вывод; Л. Тхет – проведение численных математических экспериментов.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. Москва: Машгиз, 1963. 233 с.
2. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагрузениях. Москва: Изд-во МГУ, 1965. 263 с.
3. Остаточные напряжения и предел выносливости при изгибе деталей с концентраторами напряжений / В.Ф. Павлов, В.А. Кирпичев, В.К. Шадрин, О.Ю. Семенова // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Третьей Всероссийской научной конференции, Самара, 29–31 мая 2006 г. Часть 1. Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2006. С. 150–151. EDN: TGHMPP
4. Dashti A., Keller C., Vieille B., Guillet A., Gallo C., Habraken A., Duchêne L. Impact of hardening law on the FEM prediction of residual stresses in copper-clad aluminum wires. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2023. <https://doi.org/10.1007/s00170-023-11315-2>
5. Буренин А.А. Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 2(276). С. 110–119. EDN: LDDMBN
6. Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Остаточные напряжения в материале толстостенной трубы, подвергнутой неравномерному разогреву // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций: материалы докладов III дальневосточной школы-семинара, Комсомольск-на-Амуре, 18–21 сентября 2018 г. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2018. С. 96–98. EDN: VJTVIQ
7. Вахрушева В.С., Малиш О.Д., Грузин Н.В. Визначення залишкових напружень у трубах // Металознавство та термічна обробка металів. 2023. № 1(100). С. 8–13. <https://doi.org/10.30838/J.PMNTM.2413.280323.8.939>
8. Гринченко М.И. Метод определения механических остаточных напряжений и его перспективы для создания эталона единицы механического остаточного напряжения // Вестник метролога. 2016. № 4. С. 19–23. EDN: UUBQUN
9. Schubnell J., Carl E., Widerspan V., Collmann M. Determination of loading and residual stresses on offshore jacket structures by X-ray diffraction. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11(7):1304. <https://doi.org/10.3390/jmse11071304>
10. Разживин В.А. Исследование остаточных напряжений, возникающих при инкрементальном формообразовании // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2023. Т. 25, № 1(111). С. 5–9. <https://doi.org/10.37313/1990-5378-2023-25-1-5-9>
11. Cao X., Wang H., Chen Y., Shen S., Tao Z., You M., Kim S., Kong Z. Experimental and numerical study of residual stresses in 550 MPa high strength steel welded angle sections. *Structures*. 2023;(56):10497. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.104907>
12. Махалов М.С. Расчетные модели остаточных напряжений поверхностного слоя после упрочнения способами поверхностного пластического деформирования // Ползуновский альманах. 2012. № 1. С. 149–154. EDN: PVHCIB
13. Методи визначення залишкових напружень / І.П. Кондратенко, І.В. Божко, А.В. Жильцов, В.В. Васюк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. 2013. Т. 13, № 2. С. 127–135. EDN: SKAYXJ
14. Особенности распределения остаточных напряжений в деталях с малой концентрацией напряжений / В.С. Вакулюк, А.С. Злобин, Д.В. Анохин, Д.С. Чуриков // Проблемы и перспективы развития двигателестроения: материалы докладов Международной научно-технической конференции, Самара, 12–14 сентября 2018 г. Самара: Самарский нац. исслед. ун-т им. акад. С.П. Королева, 2018. С. 230–231. EDN: VOQXVO
15. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва: Машиностроение, 1975. 399 с.

16. Андрианов И.К. Упруго-пластическое деформирование толстостенных осесимметричных оболочек под действием внутреннего давления с учетом нелинейной пластичности и сжимаемости материала. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре гос. ун-т, 2023. 92 с.
17. Феоктистов С.И., Андрианов И.К., Тхет Л. Моделирование напряжённо-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек с учётом физической нелинейности материала // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2022. № 3(59). С. 12–20. <https://doi.org/10.17084/20764359-2022-59-12>
18. Феоктистов С.И., Андрианов И.К. Уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для решения осесимметричных процессов обработки металлов давлением // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 7(55). С. 26–30. <https://doi.org/10.17084/20764359-2021-55-26>

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2023. N 4/57

*Mechanics of Deformable Solids*[www.dvfu.ru/en/vestnikis](http://www.dvfu.ru/en/vestnikis)

Original article

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2023-4/101-111>

Andrianov I., Feoktistov S., Htet L.

IVAN K. ANDRIANOV, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor,

ivan\_andrianov\_90@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8732-9615>

SERGEY I. FEOKTISTOV, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Chief Researcher,

serg\_feo@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8684-7541>

LIN HTET, Postgraduate Student, linhtetnaining513028@gmail.ru,

<https://orcid.org/0000-0001-6878-0718>*Komsomolsk-na-Amure State University*

Komsomolsk-on-Amur, Russia

### Estimation of the error in determining residual stresses under elastic-plastic loading of thick-walled spherical shells during linear hardening of the material

**Abstract.** The study considers the problem of estimating residual stresses in thick-walled spherical shells under internal pressure during elastic-plastic deformation. A mathematical model of elastic-plastic deformation of a spherical shell was constructed using the provisions of the deformation theory of plasticity. The novelty of the study is due to the consideration of changes in the geometry of the shell during loading when determining residual stresses. For a piecewise linear model of the material, the results of calculating residual stresses using analytical formulas using the "hardening" principle and the method of variable elasticity parameters when changing the geometry of the shell during loading are presented. According to the results of the evaluation of solutions obtained analytically and numerically, with an increase in the wall thickness of the spherical shell, as well as with an increase in the hardening index of the shell material, the relative error in calculating residual stresses increases.

**Keywords:** residual stresses, thick-walled shell, sphere, solidification principle, geometric nonlinearity

**For citation:** Andrianov I., Feoktistov S., Htet L. Estimation of the error in determining residual stresses under elastic-plastic loading of thick-walled spherical shells during linear hardening of the material. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2024;(4):112–120. (In Russ.).

Contribution of the authors: I.K. Andrianov – formulation of the research problem, development of numerical methods for calculating residual stresses, description of the conducted scientific research and results.

S.I. Feoktistov – development of numerical research methods, description of the conducted research, elaboration of conclusions and conclusion. L. Htet – conducting numerical mathematical experiments.

The authors declare no conflict of interests.

## REFERENCES

1. Birger I.A. Residual stresses. Moscow, Mashgiz Publ., 1963. 233 p. (In Russ.).
2. Moskvitin V.V. Plasticity under variable loads. Moscow, Moscow State University Publ., 1965. 263 p. (In Russ.).
3. Pavlov V.F., Kirpichev V.A., Shadrin V.K., Semenova O.Yu. Residual stresses and the limit of endurance when bending parts with stress concentrators. *Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference, Samara, May 29–31, 2006. Part 1.* Samara, Samara State Technical University Publ., 2006. P. 150–151. (In Russ.).
4. Dashti A., Keller C., Vieille B., Guillet A., Gallo C., Habraken A., Duchêne L. Impact of hardening law on the FEM prediction of residual stresses in copper-clad aluminum wires. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* 2023. <https://doi.org/10.1007/s00170-023-11315-2>
5. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Murashkin E.V. On the residual stresses in the vicinity of a cylindrical discontinuity in a viscoelastoplastic material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2006;47(2):241–248. <https://doi.org/10.1007/s10808-006-0049-5>
6. Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A. Residual stresses in the material of a thick-walled pipe subjected to uneven heating. *Fundamental mechanics as a basis for improving industrial technologies, technical devices and structures: Proceedings of Reports of the III Far Eastern School-seminar, Komsomolsk-on-Amur, September 18–21, 2018.* Komsomolsk-on-Amur, Komsomolsk-na-Amure State Technical University Publ., 2018. P. 96–98. (In Russ.).
7. Vakhrushev V.S., Malysh O.D., Hruzin N.V. Determination of residual stresses in pipes. *Metal Science and Heat Treatment of Metals.* 2023;(1):8-13. (In Ukr.). <https://doi.org/10.30838/J.PMHTM.2413.280323.8.939>
8. Grinchenko M.I. Method for determining mechanical residual stresses and its prospects for creating a standard unit of mechanical residual stress. *Bulletin of the Metrologist.* 2016;(4):19–23. (In Russ.).
9. Schubnell J., Carl E., Widerspan V., Collmann M. Determination of loading and residual stresses on offshore jacket structures by X-ray diffraction. *Journal of Marine Science and Engineering.* 2023;11(7):1304. <https://doi.org/10.3390/jmse11071304>
10. Razzhivin V.A. Investigation of residual stresses arising during incremental shaping. *Izvestiya of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.* 2023;25(1):5–9. (In Russ.). <https://doi.org/10.37313/1990-5378-2023-25-1-5-9>
11. Cao X., Wang H., Chen Y., Shen S., Tao Z., You M., Kim S., Kong Z. Experimental and numerical study of residual stresses in 550 MPa high strength steel welded angle sections. *Structures.* 2023;(56):10497. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.104907>
12. Makhalov M.S. Computational models of residual stresses of the surface layer after hardening by methods of surface plastic deformation. *Polzunovsky Almanac.* 2012;(1):149–154. (In Russ.).
13. Kondratenko I.P., Bozhko I.V., Zhiltsov A.V., Vasyuk V.V. Methods definitions of residual stress. *Prati Tavriysk State Agrotechnological University.* 2013;13(2):127–135. (In Ukr.).
14. Vakulyuk V.S., Zlobin A.S., Anokhin D.V., Churikov D.S. The peculiarities of residual stresses distribution in parts with a slight stress concentration. *Problems and prospects of engine building development: Proceedings of Reports of the International Scientific and Technical Conference, Samara, September 12–14, 2018.* Samara, Samara National Research University Publ., 2018. P. 230–231. (In Russ.).
15. Malinin N.N. Applied theory of plasticity and creep. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 399 p. (In Russ.).
16. Andrianov I.K. Elastic-plastic deformation of thick-walled axisymmetric shells under the action of internal pressure, taking into account the nonlinear plasticity and compressibility of the material. Komsomolsk-on-Amur, Komsomolsk-on-Amur State University Publ., 2023. 92 p. (In Russ.).
17. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Htet L. Modeling of the stress-strain state of thick-walled cylindrical shells taking into account physical nonlinearity of the material. *Scientific Notes of the Komsomolsk-on-Amur State Technical University.* 2022;(3):12–20. (In Russ.). <https://doi.org/10.17084/20764359-2022-59-12>
18. Feoktistov S.I., Andrianov I.K. Equations of joint logarithmic deformations in Euler coordinates for solving axisymmetric pressure metal processes. *Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University.* 2021;(7):26–30. (In Russ.). <https://doi.org/10.17084/20764359-2021-55-26>