

Научная статья  
УДК 539.4:669.018.29  
<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2025-3/27-38>

## К расчёту коэффициента упрочнения для степенной аппроксимации диаграмм деформирования сталей в рамках деформационной теории пластичности

Константин Александрович Молоков<sup>1,2,✉</sup>, Валерий Васильевич Новиков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация

<sup>2</sup> Владивостокский государственный университет, Владивосток, Российская Федерация

✉ [spektrum011277@gmail.com](mailto:spektrum011277@gmail.com)

**Аннотация.** В статье представлены расчётные зависимости и новый аналитический метод расчёта коэффициента степенного упрочнения для аппроксимации диаграмм деформирования сталей в рамках деформационной теории пластичности. Метод учитывает ключевые характеристики материала, снижает погрешности при аппроксимации, что актуально для описания поведения материалов при сложных нагрузках и деформациях. Разработка точных методов анализа поведения материалов позволяет не только повысить безопасность, но и оптимизировать затраты на проектирование и эксплуатацию. Выполнен анализ различных подходов к схематизации диаграмм деформирования, включая линейную и степенную аппроксимации. Установлено, что предложенный метод обеспечивает лучшее соответствие с экспериментальными данными, особенно для малоуглеродистых и низколегированных сталей. Результаты исследования могут быть полезными для инженеров и исследователей в области кораблестроения, машиностроения и механики деформированного твёрдого тела. Они позволяют улучшить методики контроля развития дефектов, что предупреждает о распространении трещин, повышая надёжность и долговечность судовых конструкций. Предложенный метод может быть интегрирован в существующие подходы к анализу прочности с использованием программ расчётного анализа напряжённого состояния за область упругости, улучшая моделирование поведения материалов под нагрузкой.

**Ключевые слова:** сварные конструкции, сталь, предельное состояние, истинные напряжения разрыва, коэффициент степенного упрочнения, истинная диаграмма деформирования, условная диаграмма, деформационная теория пластичности, аппроксимация, модуль упругости, пластическая неустойчивость  
**Для цитирования:** Молоков К.А., Новиков В.В. К расчёту коэффициента упрочнения для степенной аппроксимации диаграмм деформирования сталей в рамках деформационной теории пластичности // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2025. № 3(64). С. 27–38.

Original article

## On the calculation of the hardening coefficient for the power approximation of steel deformation diagrams within the framework of the deformation theory of plasticity

Konstantin A. Molokov<sup>1,2,✉</sup>, Valery V. Novikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation

<sup>2</sup> Vladivostok State University, Vladivostok, Russian Federation

✉ [spektrum011277@gmail.com](mailto:spektrum011277@gmail.com)

**Abstract.** The article presents the calculated dependencies and a new analytical method for calculating the power hardening coefficient for approximating the deformation diagrams of steels within the framework of the

deformation theory of plasticity. The method takes into account the key characteristics of the material, reduces errors in approximation, which is important for describing the behavior of materials under complex loads and deformations. The development of accurate methods for analyzing the behavior of materials allows not only to increase safety, but also to optimize design and operation costs. An analysis of various approaches to the schematization of deformation diagrams, including linear and power approximations, is performed. It is found that the proposed method provides better agreement with experimental data, especially for low-carbon and low-alloy steels. The results of the study can be useful for engineers and researchers in the field of shipbuilding, mechanical engineering and mechanics of deformed solids. They allow improving the methods for monitoring the development of defects, which warns of crack propagation, increasing the reliability and durability of ship structures. The proposed method can be integrated into existing approaches to strength analysis using programs for the computational analysis of the stress state beyond the elastic region, improving the modeling of the behavior of materials under load.

**Keywords:** welded structures, steel, ultimate limit state, true rupture stress, power hardening coefficient, true stress-strain diagram, conventional diagram, deformation theory of plasticity, approximation, elastic modulus, plastic instability

**For citation:** Molokov K.A., Novikov V.V. On the calculation of the hardening coefficient for the power approximation of steel deformation diagrams within the framework of the deformation theory of plasticity. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2025, no. 3(64), pp. 27–38. (In Russ.).

## Введение

Надёжность и долговечность судовых конструкций в сильной степени зависят от неоднородности структурных параметров и механических характеристик сталей, развития микро- и макротрещин. Актуальной задачей является определение плотности возникающих повреждений или их величины, необходимое для оценки момента начала катастрофического разрушения. Поэтому важным является разработка и совершенствование методов для описания поведения материалов при сложных нагрузках и деформациях, характерных для эксплуатации корабельных конструкций.

В области упругопластического анализа конструкций из пластичных материалов существует множество подходов к схематизации диаграмм деформирования. Эти подходы необходимы для описания поведения материалов при сложном нагружении [1]. Для получения адекватных результатов целесообразно использовать диаграмму напряжений, наиболее полно учитывающую реальные свойства применяемых конструкционных пластичных материалов [1–5].

Проведённые исследования авторов [6, 7] демонстрируют, что выбор подходящей схематизированной диаграммы напряжений и качество аппроксимации диаграмм значительно влияют на расчётные напряжения в области упругопластического деформирования материала оболочек, а также на величину предельного давления для пластического состояния конструкции, которое используется для оценки допустимой нагрузки.

Самой простой формой схематизации является использование известной диаграммы Прандтля (диаграммы идеального упругопластического материала), не учитывающей упрочнение материала, т.е. в области, где деформации  $e_i \geq e_{i0,2}$ , имеем постоянство напряжений  $\sigma_i = \sigma_{0,2}$ .

Другим подходом является линейная аппроксимация участка упрочнения истинной диаграммы растяжения, согласно которой истинные напряжения будут соответствовать закону изменения [8]:

$$\sigma_i = \sigma_{0,2} + \frac{S_{отр} - \sigma_{0,2}}{E e_{кр} - \sigma_{0,2}} (eE - \sigma_{0,2}), \quad (1)$$

где  $S_{отр}$  – истинные напряжения отрыва при одноосном растяжении образца, вычисляемые через критическое относительное сужение  $\psi_{кр}$  и временный предел прочности как

$$S_{отр} = \sigma_B (1 + 1,4\psi_{кр}), \quad (2)$$

где  $e_{кр}$  – критическая пластическая деформация до разрушения образца;  
 $E$  – модуль продольной упругости материала.

Зависимость (1) будет показывать лучшие результаты аппроксимации в области малых пластических деформаций для тех истинных диаграмм, которые имеют более резкий переход на линейный участок упрочнения. Такой положительной особенностью обладают малоуглеродистые стали с площадкой текучести диаграммы и некоторые аустенитные стали.

В работе [6] для одноосного растяжения предложена аппроксимация участка упрочнения диаграммы условных напряжений в виде квадратичной параболы:

$$\sigma_i = \sigma_{0,2} + 2(\sigma_{iB} - \sigma_{0,2}) \left(\frac{e_i}{e_B}\right) - (\sigma_{iB} - \sigma_{0,2}) \left(\frac{e_i}{e_B}\right)^2, \quad (3)$$

а в [9] – степенная аппроксимация диаграммы истинных напряжений от предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  до предела прочности:

$$\sigma_i = \sigma_{\text{пц}} + (\sigma_{iB} - \sigma_{\text{пц}}) \left(\frac{e_i}{e_B}\right) + [\sigma_{iB}(1 - e_B) - \sigma_{\text{пц}}] \times \left(1 - \frac{e_i}{e_B}\right) \left(\frac{e_i}{e_B}\right)^m, \quad (4)$$

где  $\sigma_{iB}$  – истинные напряжения, соответствующие пределу прочности;  
 $e_B$  – деформация, соответствующая пределу прочности на истинной диаграмме;  
 $m$  – коэффициент степенного упрочнения.

Функция (4) показала хорошее описание экспериментальных данных аустенитной стали, когда достаточно точно известны входящие в него значения характеристик. Она вполне соответствует реальной диаграмме, однако недостаток такой аппроксимации заключается в отсутствии рекомендаций относительно величины условной деформации  $\varepsilon_B$  и предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$ , которые не являются базовой характеристикой материала. Характеристики не указываются в справочниках, а их значения в (3) и (4) существенно влияют на точность аппроксимации, как по участку упрочнения условной диаграммы, так и степенной аппроксимации истинной диаграммы деформирования. В некоторых случаях в приближённых расчётах (за неимением условного значения  $\varepsilon_B$ ) допускается принимать его численно равным равномерному удлинению  $\delta_p$  образца в долях [9], которое находится по результатам опыта или вычисляется с приемлемой точностью по зависимости:

$$\delta_p = \psi_B / (1 - \psi_B), \quad (5)$$

где  $\psi_B$  – равномерное сужение образца. Истинные деформации окончания равномерной деформации и начала образования шейки можно вычислить по формуле:

$$e_B = \ln(1 + \varepsilon_B). \quad (6)$$

Зависимость (5) справедлива в узком диапазоне значений равномерного сужения (0,15–0,3), что сильно ограничивает её применимость, в том числе и из-за отсутствия  $\psi_B$  в стандартных справочных данных по конструкционным материалам. Для циклически стабильных материалов авторы [10] указывают приближённое соотношение  $\psi_B \cong 0,5\psi_{\text{кр}}$ , которое даёт возможность оценить величину  $m$ , определив равномерное удлинение образца. Стали феррито-перлитного класса (горячекатаные малоуглеродистые стали) или стали закалённые и высоко отпущенные после закалки, как правило, имеют большее значение критического сужения. Получаемые значения  $\psi_B$  не входят в указанный диапазон применимости (5), поэтому такая оценка является очень приближённой.

На основании анализа экспериментальных данных<sup>1</sup> и исследований других авторов установлено, что в области нормальных и близких к ним температур при деформировании со скоростями деформации  $2 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$  в диапазоне логарифмических деформаций 0,1 – 1,25 кривые упрочнения неупрочнённых пластической деформацией в холодном состоянии углеродистых и легированных конструкционных, инструментальных, высоколегирован-

<sup>1</sup> Кроха В.А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: справочник. Москва: Научно-техническое издательство «Машиностроение», 1980. 157 с.

ных ферритных и аустенитных сталей, алюминия и алюминиевых сплавов, лёгких металлов, меди и других труднодеформируемых металлов и их сплавов наиболее точно аппроксимируются степенным уравнением. Одна из наиболее распространённых записей такого уравнения аппроксимации диаграммы деформирования даётся в виде

$$\sigma_i = \sigma_{0,2} \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{0,2}} \right)^m, \quad (5)$$

которое позволяет учитывать деформационное упрочнение материала. Однако для успешного применения этого метода необходимо знать коэффициент степенного упрочнения, который может быть рассчитан по различным формулам. Как правило, это зависимости, полученные на основе обработки экспериментальных данных, или специально разработанные формулы на базе данных по большой группе сталей. Так, авторы [10] рекомендуют находить коэффициент  $m$  аппроксимацией по зависимости (5) методом наименьших квадратов.

Существует несколько формул для определения коэффициента степенного упрочнения  $m$ . Одна из приближённых зависимостей приведена в справочнике [11], она широко используется [12, 9, 11] для конструкционных сталей и выглядит следующим образом:

$$m = \frac{0,75 \cdot \lg(\sigma_B(1 + 1,4 \psi_{кр})/\sigma_{0,2})}{\lg\left(10^5 \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \psi_{кр}}\right)/(200 + 0,5\sigma_{0,2})\right)}, \quad (6)$$

где  $\sigma_B$  – условный предел прочности материала;

$\sigma_{0,2}$  – предел текучести;

$\psi_{кр}$  – относительное поперечное сужение образца после разрыва.

Вполне вероятно, что зависимость [11] получена полуэмпирическим путём с целью наилучшего описания изменения  $m$  большого количества конструкционных сталей.

Эта формула позволяет оценить коэффициент  $m$  для малоуглеродистых и низколегированных пластичных сталей, однако она имеет ограничения, связанные с приближённым характером оценки. В частности, трудности возникают при выборе подходящих значений для параметров аппроксимации, которые зависят от механических свойств материалов.

Коэффициент  $m$  в зависимости (4) можно определить по исходным характеристикам материала, выразив его для точки предела текучести и полагая, что  $\sigma_i = \sigma_{0,2}$  и  $\varepsilon_i = 0,002$ . Однако в этом случае остаются вышеуказанные ограничения, к которым добавляется допущение, что  $m$  остаётся постоянным для всей стадии упрочнения, что не соответствует действительности. Даже по предварительным расчётам видно, что значения коэффициента упрочнения, полученные по (4) и (8), существенно отличаются.

Таким образом, для построения адекватных диаграмм деформирования необходим аналитический метод расчёта степенного коэффициента упрочнения, который учитывал бы все ключевые характеристики материала и позволял бы минимизировать погрешности при аппроксимации. В данной статье мы предлагаем новый аналитический вывод для коэффициента степенного упрочнения и построения степенной аппроксимации диаграмм деформирования, позволяющий улучшить качество упругопластического анализа конструкций.

Таким образом, целью данной работы является разработка аналитического метода расчёта степенного коэффициента упрочнения и построение степенной аппроксимации диаграмм деформирования для упругопластического анализа конструкций из пластичных материалов.

### Исходные предпосылки

Коэффициент степенного упрочнения  $m$ , как отмечено выше, может быть найден по ряду зависимостей (4)–(8), и от точности его значения существенно зависит качество аппроксимации диаграммы деформирования.

Для условий несжимаемости материала образца при одноосном растяжении начало пластической неустойчивости и окончание равномерного деформирования должны соответствовать условию

$$\frac{d\sigma_i}{de_i} = \sigma_i, \tag{7}$$

где  $\sigma_i$  и  $e_i$  – истинные напряжения и деформации. Здесь будем рассматривать первую стадию пластической неустойчивости, которая характеризуется переходом от равномерной к макролокальной деформации со спадом нагрузки или условного напряжения.

В работе (7) [7] с целью определения предельной прочности сосудов давления рассмотрены три стадии упрочнения, подчиняющиеся линеаризации в логарифмических координатах, в каждой из которых наблюдается конкретное постоянное значение коэффициента упрочнения. При этом в зависимости от термической обработки, уровня прочности и вида стали количество линейных участков в полных логарифмических координатах варьируется, а коэффициент  $m$  может от участка к участку сильно изменяться. Анализируя и сопоставляя данные о коэффициентах упрочнения, не трудно заметить, что зависимость (8) отражает упрочнение на втором участке и хорошо согласуется с экспериментальными данными феррито-перлитных конструкционных сталей. Также следует отметить, что данный участок охватывает наиболее широкий диапазон деформаций по истинной диаграмме деформирования, и построение (на базе ограниченной информации по стандартным справочным экспериментальным данным) простой модели для аппроксимации всех участков с хорошей точностью не представляется возможным.

При больших пластических деформациях стали используют связь между истинными напряжениями и деформациями в виде (7). После дифференцирования последнего и подстановки в (8) получим для момента начала неустойчивости численное равенство  $m = e_i$ , а для конкретной точки деформации предела прочности по истинной диаграмме:

$$m = e_B = \ln(1 + \varepsilon_B). \tag{8}$$

С некоторой погрешностью, являющейся функцией отношения равномерного приращения образца к приращению образца после начала и до момента (9), можно записать

$$m = \ln(1 + \delta_p), \tag{11}$$

или с ещё большей погрешностью  $m = \ln(1 + \delta_5)$ . По формуле (11) можно получить менее точное значение, однако такое допущение позволяет оценить значение  $m$ . Далее, приравняв (11) к (5), можно найти величину относительного сужения для момента окончания стадии равномерной деформации, которое будет зависеть от коэффициента  $m$ , т.е.:

$$\psi_B = 1 - \exp(-m). \tag{12}$$

Для фактического диапазона значений коэффициента  $m$  конструкционных и феррито-перлитных сталей зависимость почти не отклоняется от линейного закона. Подставляя (12) в (5), а полученное выражение в (11), можно показать, что таким образом рассчитать  $m$  не представляется возможным, так как уравнение обратится в тождество  $\exp(m) = \exp(m)$ .

### Расчётная зависимость для коэффициента степенного упрочнения

Если положить в (7) известные значения для точки  $\sigma_i = S_{отр}$  и  $e_i = e_{кр} = \ln[1/(1 - \psi_{кр})]$ , а  $e_{0,2}$  обозначить за  $e_T$ , легко получить решение относительно  $m$  в виде:

$$m = \ln(S_{отр}/\sigma_{0,2})/\ln(e_{кр}/e_T), \tag{13}$$

где  $e_T$  определяются по формуле  $e_T = \sigma_{0,2}/E$ .

Получаемые по этой зависимости результаты не отвечают достаточной точности и не согласуются ни с (8), ни с экспериментальными данными для сталей (табл. 1). С другой стороны, закон (13) качественно удовлетворяет формуле, описывающей изменения  $m$  сталей, и, если эту зависимость умножить на число 0,83 (значение подбирается для наилучшей аппроксимации методом наименьших квадратов), она даст точность, уже сопоставимую с (8).

**Характеристики сталей [5]**  
Characteristics of steels [5]

№п/п	Марка стали	$\sigma_B$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$m$	$\psi_{кр}$	$\delta_5^{(1*)}$ , %	$\delta_5$ , %
1	Ст10	320	190	0,17	0,73	36,6	> 31
2	15Г	410	245	0,148	0,55	26,4	26
3	Ст3сп	450	270	0,16	0,71	24,8	25
4	22К	540	310	0,16	0,69	20,3	22 ... 26
5	50	680	350	0,16	0,62	15,8	17
6	10ХСНД	540	390	0,132 <sup>(2*)</sup>	0,71	20,3	19
7	37ХНЗА	1014	743	0,12	0,6	10,3	10
8	30ХГСА	1750	1360	0,09	0,44	6	7
9	30ХГСА*	1470	1080	0,12	0,6	7	7

Примечание: \* – термическая обработка на другую прочность; 1\* – расчёт по  $\delta_5 = \exp(100/\sigma_B) - 1$ , [5]; 2\* – расчёт по зависимости (6).

Авторы (10)[10] предлагают простую формулу для приближённого расчёта коэффициента упрочнения, соответствующего равномерному удлинению, в виде:

$$m = 2(1 - \sigma_{0,2}/\sigma_B)/3 = 0,67(1 - K_{ТВ}), \tag{14}$$

где  $K_{ТВ}$  – коэффициент, характеризующий сопротивляемость металла пластическим деформациям. Он отражает способность стали к равномерной деформации. Результаты, получаемые по этой приближённой формуле, сильно расходятся со всеми оценками, получаемыми, например, по (4), (8), (11), (13), и с экспериментальными данными (см. табл. 1). Следует отметить, что степенная диаграмма деформирования очень чувствительна к значению  $m$ , поэтому подобные приближённые зависимости не дадут необходимой точности описания степенной диаграммы аппроксимации.

Нахождение упругопластического решения из упругого решения задачи часто используется в инженерной практике, например, в рамках рассмотрения деформационной теории пластичности, для которой справедливы соотношения  $\sigma_i = \sigma_i^y (E_s/E)^{1/2}$  и  $e_i = e_i^y (E/E_s)^{1/2}$  [12], а также аппроксимирующая зависимость в следующей форме:

$$\sigma_i = \sigma_{0,2}^{1/m+1} \sqrt{1/m-1} [\sigma_i^y]^2, \tag{9}$$

где  $\sigma_i^y$  и  $e_i^y$  – интенсивность напряжений и деформаций при упругом решении задачи;

$E_s$  – секущий модуль;

$E$  – модуль упругости;

$m$  – коэффициент степенного упрочнения (7).

Запишем (15) в виде произведения постоянной материала, не зависящей от упругого решения, и части, зависящей от упругого решения:

$$\sigma_i = \sigma_{0,2}^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot [\sigma_i^y]^{2m/(m+1)}. \tag{16}$$

Обозначим ключевые точки, когда истинные значения напряжений должны быть точно равны фактическим экспериментальным значениям по истинной диаграмме растяжения. Это  $S_{отр}$ ,  $k\sigma_{0,2}$  и  $k_{пц}\sigma_{0,2}$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, произведение которого на  $\sigma_{0,2}$  должно соответствовать указанному условию для ключевой точки  $S_{отр}$  упругопластического решения. Коэффициент  $k$  – суть отношения  $e_{кр}/0,002$  на коэффициент  $k_{пц}$ , произведение которого на  $\sigma_{0,2}$  даёт вторую точку упругопластического решения, совпадающую с экспериментальными данными. Для двух узловых точек имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} S_{отр} = \sigma_{0,2}^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot [k\sigma_{0,2}]^{2m/(m+1)}; \\ k_{пц}\sigma_{0,2} = \sigma_{0,2}^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot [\sigma_{0,2}]^{2m/(m+1)}. \end{cases} \quad (17)$$

Если решать систему способом подстановки, то можно получить громоздкое уравнение относительно  $m$ , не подходящее для инженерных расчётов. В этом случае гораздо легче поделить первое уравнение системы на второе; тогда будем иметь равенство:

$$\frac{S_{отр}}{k_{пц}\sigma_{0,2}} = \frac{(k\sigma_{0,2})^{\frac{2m}{m+1}}}{(\sigma_{0,2})^{\frac{2m}{m+1}}}. \quad (18)$$

Решая (18) относительно коэффициента упрочнения, получаем формулу:

$$m = \frac{\ln(k_{пц}\sigma_{0,2}/S_{отр})}{\ln(S_{отр}/[k_{пц}k^2\sigma_{0,2}])}. \quad (19)$$

В полученное выражение входят все вычисляемые по стандартному набору механические характеристики сталей, кроме  $k_{пц}$ . Для оценки этого коэффициента и наилучшего его согласования с экспериментальными данными и результатами, получаемыми по формуле (8), нами были сделаны соответствующие расчёты. Установлено, что произведение  $k_{пц}\sigma_{0,2}$  по величине находится очень близко к значению предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , и результаты расчётов  $m$  для феррито-перлитных сталей хорошо согласуются с формулой (8) при значении  $k_{пц} = 0,6$ .

Зависимость для аппроксимации истинной диаграммы деформирования малоуглеродистых сталей при использовании (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_i = \sigma_{0,2} \left( \frac{e_i}{\varepsilon_{0,2}} \right)^{\frac{\ln(0,6\sigma_{0,2}/S_{отр})}{\ln(S_{отр}/[0,6(e_{кр}/0,002)^2\sigma_{0,2}])}}, \quad (20)$$

где  $\varepsilon_{0,2} = 0,002$ ;  $S_{отр}$  вычисляется по формуле (2);  $e_i$  может изменяться от 0,002 до  $e_{кр}$ .

При необходимости построения диаграммы из упругого решения задачи (при известных напряжениях) следует решение для  $m$  (19) подставить в исходное (16). Если в полученном выражении положить  $\sigma_i^y = e_i\sigma_{0,2}/0,002$ , то зависимость приобретает вид:

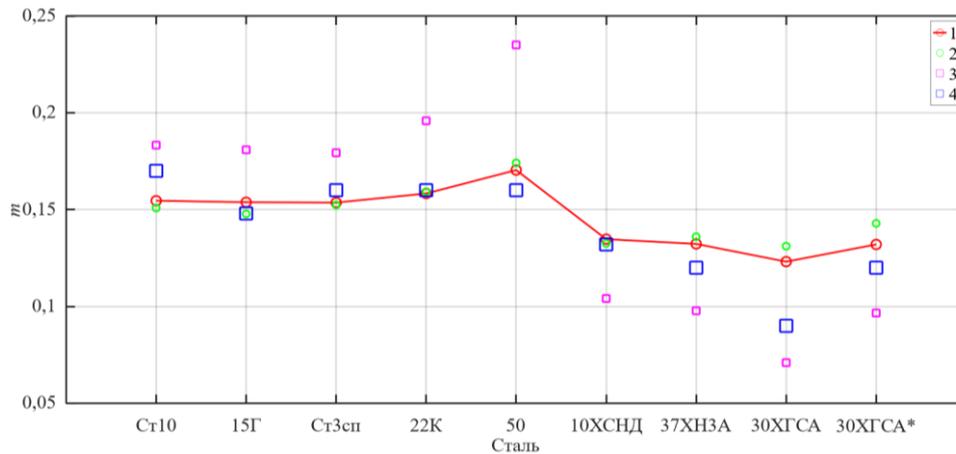
$$\sigma_i = \sigma_{0,2}^{\frac{1-m'}{1+m'}} \cdot [e_i\sigma_{0,2}/0,002]^{2m'/(m'+1)}, \quad (21)$$

где  $m' = m/2$  – для построения истинной диаграммы одноосного растяжения;  
 $m' = m$  – для задачи описания истинных напряжений при СНС для вершины трещины.  
 Результаты сопоставления диаграммы с экспериментальными данными для одной типичной стали 15Х2ГМФ представлены в [13].

Отношение  $e_{кр}/0,002$  называется относительной пластической деформацией до разрушения образца [11]. Теоретически выражение (21) должно быть равноценно аппроксимации (20), где  $e_i$  может также изменяться от 0,002 до  $e_{кр}$ .

### Сравнительный анализ точности расчётов

На рис. 1 представлены расчётные точечные значения по зависимости (19), соединённые для наглядности ломаной красной линией по сталям из табл. 1. Как видно, результаты определения  $m$  находятся ближе к экспериментальным значениям, чем полученные по (8), при этом соблюдается хорошее качественное согласование данных в целом по разным сталям. Если сопоставить результаты расчёта по (19) и (8), то почти все значения для указанных сталей по предлагаемой нами формуле находятся между значениями, получаемыми по (8) и известными экспериментальными данными, что говорит о несколько лучшем результате для малоуглеродистых, низколегированных конструкционных сталей низкой и средней прочности.

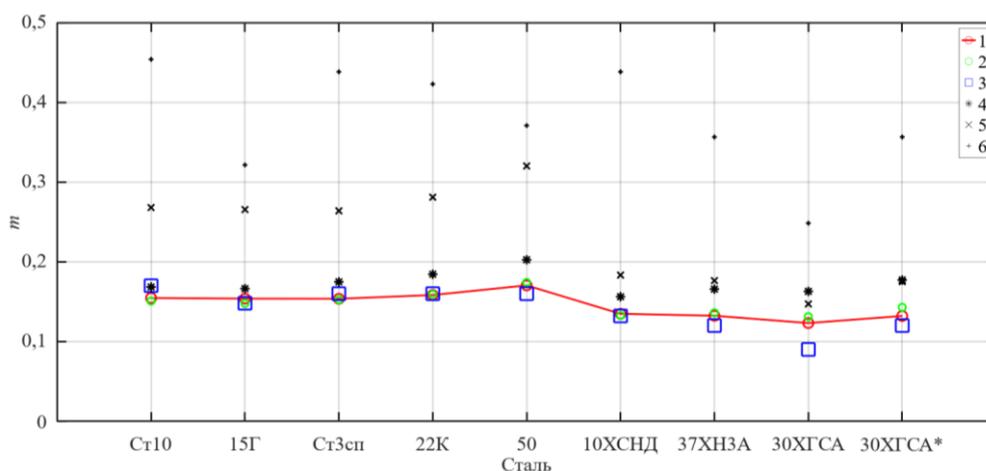


**Рис. 1. Сопоставление аналитически рассчитанных коэффициентов  $m$  с экспериментальными значениями (маркер 4) по различным формулам, маркеры: 1 – зависимость (19); 2 – зависимость (6); 3 – зависимость (4)**

Fig. 1. Comparison of analytically calculated coefficients  $m$  with experimental values (marker 4) using various formulas, markers: 1 – dependence (19); 2 – dependence (8); 3 – dependence (4)

Значения  $m$ , получаемые по (4), показали большее отклонение от экспериментальных значений, с учётом того что для сходимости данных с экспериментом вручную подбирались значения  $\sigma_{iB}$ ,  $e_B$  и  $\sigma_{пц}$  наилучшим образом. Необходимо отметить, что для  $\sigma_{iB}$ ,  $e_B$  и  $\sigma_{пц}$  нет понятных ориентировок выбора или расчёта, а зависимость (4) достаточно чувствительна к этим значениям: их сравнительно небольшое изменение приводит к большому отклонению  $m$ .

Результаты приближённых оценок коэффициента  $m$  с предлагаемой зависимостью и известными данными эксперимента для указанных в табл. 1 сталей представлены на рис. 1. Там же добавлены чёрными маркерами данные по самым приближённым расчётным формулам. Результаты расчётов по ним заметно отличаются от экспериментальных данных и от значений, определённых по более точным известным зависимостям [11]. Особое внимание заслуживают результаты расчёта по формуле (13): здесь имеет место близкое совпадение данных по всем сталям. Визуально видно, что погрешность этой расчётной формулы можно уменьшить простым постоянным множителем 0,83, как было замечено выше.

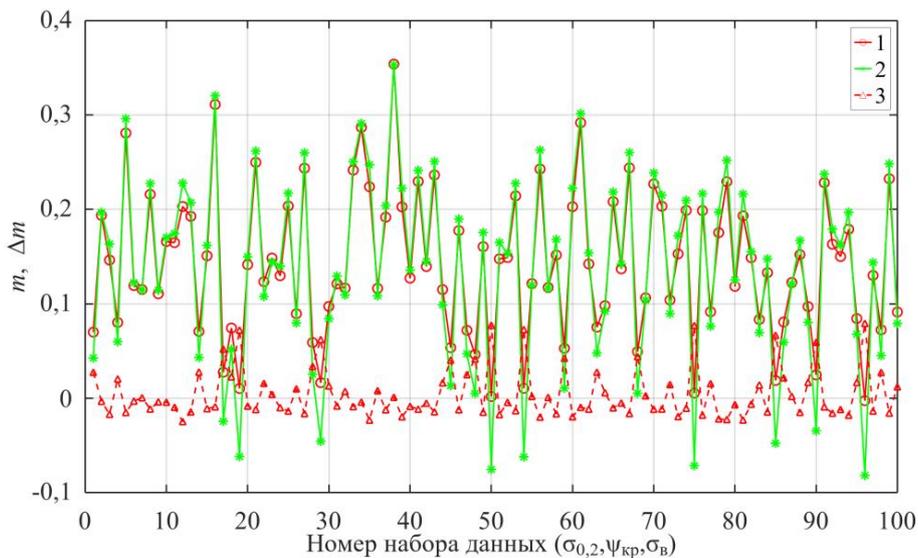


**Рис. 1. Сопоставление очень приближённых и простых зависимостей расчёта  $m$  с экспериментом и значениями, полученными по наиболее точным формулам: 3 – экспериментальные результаты (см. табл. 1); 4 – формула (13) с нормирующим коэффициентом; 5 – формула (14); 6 – формулы (5) и (6)**

Fig. 2. Comparison of very approximate and simple dependencies of  $m$  calculation with experiment and values obtained by the most accurate formulas: 3 – experimental results (see Table 1); 4 – formula (13) with a normalizing coefficient; 5 – formula (14); 6 – formulas (5) and (6)

Проанализируем результативность зависимости (19) на 100 случайных наборах механических характеристик  $\sigma_{0,2}$ ,  $\psi_{кр}$  и  $\sigma_B$ . Диапазоны случайных значений выберем для каждой характеристики такими, чтобы они не выходили из значений, приведённых в табл. 1. Сопоставив значения на случайных наборах (рис. 3), можно отметить следующее:

- в целом обе зависимости отражают одинаковые закономерности изменения коэффициента  $m$ ; для некоторых наборов они практически идентичны (результаты накладываются друг на друга);
- чем выше получаемые значения  $m$ , тем меньше разница между результатами расчётов по формулам (19) и (8);
- зависимость (8) при определённых наборах имеет значительно большее количество выбросов значений  $m$  в физически несуществующую отрицательную область;
- примерно в 90% случаях из 100 наборов разница между (19) и (8) составляет менее  $\Delta m = 0,03$ .



**Рис. 3. Сравнительная проверка зависимости (19) на случайных наборах данных:**

**1 – формула (19); 2 – формула (8); 3 – разность вычисляемых коэффициентов  $\Delta m$**

Fig. 3. Comparative verification of dependence (19) on random data sets:

1 – formula (19); 2 – formula (8); 3 – difference of calculated coefficients  $\Delta m$

Расчётный анализ позволяет заключить, что предложенный метод аналитического расчёта коэффициента степенного упрочнения демонстрирует значительное преимущество в плане точности по сравнению с традиционными подходами. Это особенно заметно для малоуглеродистых и низколегированных сталей, где новый метод позволяет минимизировать погрешности, возникающие при аппроксимации диаграмм деформирования. Важно подчеркнуть, что использование стандартных механических характеристик материалов, таких как предел текучести и относительное сужение, позволяет сделать расчёты более универсальными и применимыми в различных инженерных задачах.

Предлагаемый метод обеспечивает лучшее совпадение с экспериментальными данными и известными аналогичными зависимостями, особенно в случаях, когда требуется высокая точность описания поведения материалов при сложных нагрузках. Это особенно важно для оценки предельной прочности конструкций и сварных соединений с мягкими прослойками [5], где даже небольшие отклонения в расчётах могут привести к существенным неточностям. Введение нового аналитического подхода позволяет не только повысить надёжность конструкций, но и оптимизировать затраты на их проектирование и эксплуатацию, что является важным шагом в современной инженерной практике.

## Заключение

Получена аналитическая зависимость коэффициента упрочнения для степенной аппроксимации диаграмм деформирования сталей в рамках деформационной теории пластичности. Предложен новый аналитический метод расчёта степенного коэффициента упрочнения, который учитывает ключевые характеристики материала и позволяет минимизировать погрешности при аппроксимации. Данный подход особенно важен для адекватного описания поведения материалов при сложных нагрузках и деформациях, что весьма актуально для анализа предельной прочности элементов судовых конструкций и сварных соединений.

Проанализированы различные подходы к схематизации диаграмм деформирования, включая линейную и степенную аппроксимации, и показано, что предложенный метод обеспечивает лучшее соответствие экспериментальным данным.

Предложенная аналитическая зависимость позволяет более точно оценивать коэффициент упрочнения, что особенно важно для улучшения качества упругопластического анализа конструкций из малоуглеродистых и низколегированных сталей. Это достигается с учётом всех ключевых характеристик стали и использованием только стандартных механических свойств, указанных в марочниках сталей.

Результаты исследования могут быть полезны инженерам и исследователям и применены в машиностроении, кораблестроении и механике деформированного твёрдого тела. Они позволят улучшить методы упругопластического анализа, более точно оценить опасность трещин и других дефектов, а также повысить надёжность и долговечность конструкций. Предложенный метод может быть интегрирован в существующие подходы к анализу прочности с применением системы автоматизации инженерных расчётов (CAE), что позволит более точно моделировать поведение материалов под нагрузкой и оптимизировать элементы конструкций.

## ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

К.А. Молоков – формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение расчётов, начальная версия основного текста, формулирование выводов; В.В. Новиков – научное руководство, анализ результатов исследований, доработка выводов и основного текста. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

K.A. Molokov – formation of the basic concept, goals and objectives of the research, calculations, initial version of the main text, formulation of conclusions; V.V. Novikov – scientific guidance, analysis of research results, revision of conclusions and the main text. All authors reviewed the results and approved the final version of the manuscript.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | DISCLOSURE

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.  
The authors declare no conflict of interest.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Крюков А.А. Описание диаграмм деформирования при одноосном растяжении и чистом сдвиге с единых позиций // Всероссийская научно-техническая конференция по строительной механике корабля, посвящённая памяти профессора П.Ф. Папковича: Тезисы докл, Санкт-Петербург, 20–21 декабря 2024 года. Санкт-Петербург: Крыловский государственный научный центр, 2024. С. 53–54.
2. Скопинский В.Н., Сметанкин А.Б., Вожова Н.В. Выбор схематизированной диаграммы напряжений для упругопластического анализа пересекающихся оболочек // Машиностроение и инженерное образование. 2011. № 1(26). С. 58–65.
3. Скопинский В.Н., Сметанкин А.Б., Захаров А.А., Сафронов А.А. Улучшенная схематизация диаграммы истинных напряжений // Известия Московского государственного индустриального университета. 2010. № 3(20). С. 32–36.
4. Молоков К.А., Новиков В.В., Васильченко Н.П. Оценка выносливости элементов конструкций с микротрещинами и остаточными сварочными напряжениями // Вестник Инженерной

- школы Дальневосточного федерального университета. 2018. № 3(36). С. 22–36. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1408222>
5. Молоков К.А., Новиков В.В. Оценка трещиностойкости сварных соединений с мягкими прослойками // *Advanced Engineering Research*. 2021. Т. 21, № 4. С. 308–318. DOI: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-4-308-318>.
  6. Захаров А.А., Ласунский К.Э. Аппроксимация диаграммы деформирования материала // *Известия МГИУ*. 2009. № 3 (16). С. 42–46.
  7. Куркин С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
  8. Молоков К.А., Новиков В.В. Критерий оценки развития повреждений в сварных конструкциях судового корпуса с трещиноподобными дефектами // *Вестник Морского государственного университета*. 2024. № 97. С. 4–13. EDN: BSZXES
  9. Хажинский Г.М. Деформирование. Разрушение. Надёжность: Задачи деформирования и разрушения стали. Методы оценки прочности энергетического оборудования и трубопроводов. М.: ЛЕНАНД, 2014. 544 с.
  10. Халимов А.Г., Зайнуллин Р.С., Халимов А.А. Техническая диагностика и оценка ресурсов аппаратов. Уфа: УГНТУ, 2001. 408 с.
  11. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчёты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: справочник. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
  12. Матохин Г.В., Горбачев К.П. Инженеру о сопротивлении материалов разрушению. Монография. Владивосток: Дальнаука, 2010. 281 с.
  13. Молоков К.А. О преобразовании диаграмм деформирования от одноосного растяжения к чистому сдвигу // *Молодёжь и научно-технический прогресс: Материалы региональной научно-практической конференции*, Владивосток, 2025 год. Владивосток: Дальневосточный федеральный университет, 2025. С. 70–73. EDN: DNXQUY

## REFERENCES

1. Kryukov A.A. Description of stress-strain diagrams for uniaxial tension and pure shear from a unified perspective. *All-Russian Scientific and Technical Conference on Ship Structural Mechanics, Dedicated to the Memory of Professor P.F. Papkovich: Abstracts of Reports, St. Petersburg, December 20–21, 2024*. St. Petersburg, Krylov State Research Center, 2024, pp. 53–54. (In Russ.).
2. Skopinsky V.N., Smetankin A.B., Vozhova N.V. Selection of a schematic stress diagram for elastoplastic analysis of intersecting shells. *Mechanical Engineering and Engineering Education*, 2011, no. 1(26), pp. 58–65. (In Russ.).
3. Skopinsky V.N., Smetankin A.B., Zakharov A.A., Safronov A.A. Improved schematization of the true stress diagram. *Bulletin of the Moscow State Industrial University*, 2010, no. 3(20), pp. 32–36. (In Russ.).
4. Molokov K.A., Novikov V.V., Vasilchenko N.P. Fatigue assessment of structural elements with microcracks and residual welding stresses. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2018, no. 3(36), pp. 22–36. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1408222>
5. Molokov K.A., Novikov V.V. Crack resistance assessment of welded joints with soft interlayers. *Advanced Engineering Research*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 308–318. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-4-308-318>
6. Zakharov A. A., Lasunsky K. E. Approximation of the material deformation diagram. *Bulletin of MGIMO*, 2009, no. 3 (16), pp. 42–46. (In Russ.).
7. Kurkin S.A. Strength of welded thin-walled vessels operating under pressure. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 184 p. (In Russ.).
8. Molokov K.A., Novikov V.V. Criterion for assessing the development of damage in welded structures of a ship's hull with crack-like defects. *Bulletin of the Maritime State University*, 2024, no. 97, pp. 4–13. (In Russ.).
9. Khazhinsky G.M. Deformation. Failure. Reliability: Problems of deformation and failure of steel. Methods for assessing the strength of power equipment and pipelines. Moscow, Lenand Publ., 2014. 544 p. (In Russ.).
10. Khalimov A.G., Zainullin R.S., Khalimov A.A. Technical diagnostics and assessment of equipment resources. Ufa, Ufa State Petroleum Technical University, 2001. 408 p. (In Russ.).

11. Kogaev V.P., Makhutov N.A., Gusenkov A.P. Strength and durability calculations of machine parts and structures: Handbook. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 224 p. (In Russ.).
12. Matokhin G.V., Gorbachev K.P. To the engineer on the resistance of materials to fracture. Vladivostok, Dalnauka Publ., 2010. 281 p. (In Russ.).
13. Molokov K.A. On the transformation of deformation diagrams from uniaxial tension to pure shear. *Youth and Scientific and Technological Progress: Proceedings of the Regional Scientific and Practical Conference, Vladivostok, 2025*. Vladivostok, Far Eastern Federal University, 2025, pp. 70–73. (In Russ.).

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Молоков Константин Александрович** – кандидат технических наук, доцент Департамента промышленной безопасности, Политехнический институт, Дальневосточный федеральный университет (Владивосток, Российская Федерация); доцент кафедры информационных технологий и систем, Владивостокский государственный университет (Владивосток, Российская Федерация),

✉ [spektrum011277@gmail.com](mailto:spektrum011277@gmail.com); Scopus ID: 57197836777; <https://orcid.org/0000-0002-9764-9329>

**Konstantin A. Molokov**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial Safety, Polytechnic Institute, Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russian Federation); Associate Professor of the Department of Information Technology and Systems, Vladivostok State University (Vladivostok, Russian Federation).

**Новиков Валерий Васильевич** – кандидат технических наук, доцент Департамента Морской техники и транспорта, Политехнический институт, Дальневосточный федеральный университет (Владивосток, Российская Федерация),

✉ [leka230243@gmail.com](mailto:leka230243@gmail.com); SPIN: 7257–7822; Scopus ID: 5641710410

**Valery V. Novikov**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of the Department of Marine Engineering and Transport, Polytechnic Institute, Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russian Federation).

Статья поступила в редакцию / Received: 07.03.2025.

Доработана после рецензирования / Revised: 25.09.2025.

Принята к публикации / Accepted: 25.09.2025