

Механика деформируемого твердого тела

DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-3-1>
УДК 539.3

Ж.М. Кусаева

КУСАЕВА ЖАНСЛУ МАРАТОВНА – аспирант, SPIN: 6893-7012,
ResearcherID: AAQ-1159-2020, ORCID: 0000-0001-7028-0130,
ScopusID: 57216585356, zhkusaeva@mail.ru
Самарский государственный технический университет
Самара, Россия

Решение осесимметричной задачи термоупругости для круглой пластины с учетом связанности термоупругих полей

Аннотация: Новое замкнутое решение связанной осесимметричной задачи термоупругости построено для жестко закрепленной круглой изотропной пластины в случае изменения температуры на ее лицевых поверхностях. Известно, что изменение объема тела оказывает влияние на температурное поле конструкции. Учет этого факта вызывает серьезные математические трудности, а неучет приводит к существенным погрешностям при расчете напряженно-деформированного состояния конструкции. Большинство рассмотренных ранее работ решались в такой постановке, что физико-механические характеристики материала считались не зависящими от температуры. Однако для всестороннего анализа прочностных характеристик необходимо учитывать связанность термоупругих полей. В данной работе предложенная методика расчета принимает физико-механические характеристики зависящими от температуры и позволяет анализировать влияния температурной нагрузки на температурное поле и напряженно-деформированное состояние конструкции. На основании построенного алгоритма решения разработано программное обеспечение, позволяющее выполнить анализ влияния связанности термоупругих полей. Расчетные соотношения получены с помощью метода конечных биортогональных преобразований и справедливы для произвольного по времени внешнего температурного воздействия (граничные условия теплопроводности 1-го рода). Численный анализ результатов расчета показывает, что при заданном внешнем температурном воздействии жесткость упругой системы оказывает существенное влияние на ее термоупругое поле. При этом учет скорости изменения объема пластины приводит к уменьшению температуры и механических напряжений в процессе прогрева пластины. В дальнейшем, при постоянном температурном режиме, связанность полей не наблюдается. Разработанный алгоритм расчета находит свое применение при проектировании ограждающих конструкций в виде однослойных и многослойных пластин.

Ключевые слова: круглая пластина, классическая теория термоупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования

Введение

Неравномерный нестационарный нагрев конструкций различного назначения приводит к возникновению тепловых деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать в случае всестороннего анализа прочностных характеристик упругих систем конечных размеров [10, 11]. В настоящее время разработаны различные теории термоупругости (СТЕ, ГНІ–ГНІІІ, LS) [12, 16], позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности.

Математическая формулировка рассматриваемых начально-краевых задач в линейной трехмерной постановке включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Проблема интегрирования приводит, как правило,

к их решению в несвязанной постановке [2, 5, 9, 19–21]. В этом случае при действии на упругую систему внешней нестационарной тепловой нагрузки не учитывается влияние скорости изменения объема тела на температурное поле.

В связанной постановке замкнутые решения динамических задач термоупругости представлены в небольшом числе работ. В частности, исследования [6, 7] выполнены для конечного изотропного цилиндра с мембранным закреплением его торцевых поверхностей с помощью биортогонального интегрального преобразования [8, 13]. А в [14] представлен другой вариант решения подобных задач – метод обобщенного конечного интегрального преобразования.

В настоящей работе исследуется жестко закрепленная круглая изотропная пластина. Рассматривается случай действия на ее лицевых поверхностях нестационарной температурной нагрузки (граничные условия 1-го рода). Цель статьи – построение замкнутого решения осесимметричной задачи термоупругости для изотропного диска в случае неравномерного температурного нагрева, анализ напряженно-деформированного состояния и также температурного поля с учетом связанности термоупругих полей.

Постановка задачи

Связанная задача термоупругости при термическом воздействии представляет собой систему уравнений с учетом начальных и граничных условий. На первом этапе рассматривается замкнутая система уравнений, решение которой позволяет описывать движения и состояние деформируемых сред с учетом их физико-механических свойств, а также определяет зависимость физических величин от координат и времени.

Пусть круглая жестко закрепленная по периметру пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. На ее лицевых поверхностях задана температура, величина которой зависит от радиальной координаты r_* и времени t_* : при $z_* = 0$ $\omega_1^*(r_*, t_*)$, при $z_* = h^*$ $\omega_2^*(r_*, t_*)$ (рис. 1).

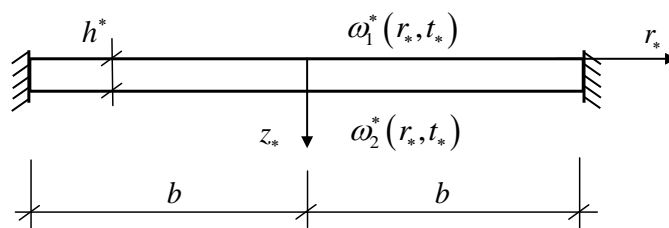


Рис. 1. Расчетная схема круглой пластины (r_*, z_*, t_*, h^* – радиальная, аксиальная переменные, время и толщина пластины в размерной форме). Здесь и далее рисунки автора

Математическая формулировка рассматриваемой начально-краевой задачи в безразмерной форме включает [4, 12]:

– систему линейных осесимметричных несамосопряженных дифференциальных уравнений относительно компонент вектора перемещений $U(r, z, t), W(r, z, t)$ и температуры $\Theta(r, z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0, \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– граничные условия:

$$r=0,1 \quad \{U(0,z,t), W(0,z,t), \Theta(0,z,t)\} < \infty, \frac{\partial \Theta}{\partial r}|_{r=1} = 0, \{U(1,z,t), W(1,z,t)\} = 0; \quad (2)$$

$$z=0,h \quad \frac{\nu}{1-\nu} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \Theta(r,z,t)|_{z=0,h} = \{\omega_1, \omega_2\};$$

– начальные условия:

$$t=0 \quad \Theta(r,z,0) = 0, \quad (3)$$

в которых $\{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\}/b$, $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = a_4 \{\Theta^*, \omega_1^* - T_0, \omega_2^* - T_0\}$, $a_1 = a_2(1-2\nu)$

$$a_2 = 0.5(1-\nu)^{-1}, \quad a_3 = \frac{\gamma^2(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)c_\epsilon} T_0, \quad a_4 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha, \quad t = t_* \frac{\Lambda}{b^2 c_\epsilon}, \quad \Theta^* = T - T_0,$$

$U^*(r,z,t), W^*(r,z,t), \Theta^*(r,z,t)$ – компоненты вектора перемещений и приращение температуры в размерной форме;

Θ^*, T, T_0 – текущая температура и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения;

E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала;

$\alpha, c_\epsilon, \Lambda$ – коэффициенты линейного теплового расширения, объемная теплоемкость и теплопроводности материала.

Условия (2) при $r=1$ определяют жесткое закрепление и теплоизоляцию цилиндрической поверхности пластины, а в случае $r=0$ – регулярность решения. Первые два равенства для $z=0, h$ учитывают отсутствие нормальных и касательных напряжений на ее лицевых поверхностях, а последние – действие температурной нагрузки (граничные условия 1-рода). Начальные условия (3) предполагают, что при $t=0$ относительное температурное поле конструкции определяется абсолютной температурой T_0 .

Построение общего решения

Начально-краевую задачу (1)–(3) решаем методом интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Фурье–Бесселя [15] с конечными пределами по переменной r и вырожденное биортогональное конечное преобразование [14] по координате z . При этом на каждом этапе решения проводится процедура стандартизации соответствующих граничных условий [1].

Трансформанты $R(n,z,t)$, $G(\lambda_{in}, n, t)$ и формулы обращения соответствующих преобразований имеют следующий вид:

$$R(n,z,t) = \int_0^1 N(r,z,t) P(n,r) r dr, \quad N(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} R P; \quad (4)$$

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^t R(n,z,t) Y(\lambda_{in}, z) dz, \quad R = \sum_{i=1}^{\infty} G H \|K_{in}\|^{-1}; \quad (5)$$

$N(r,z,t) = [U(r,z,t), W(r,z,t), \Theta(r,z,t)]^T$, $P = [s_{mp}]$ – диагональная матрица 3-го порядка;

$(s_{11} = J_1(j_n r), s_{22} = s_{33} = J_0(j_n r))$, $Y(\lambda_{in}, z) = [0, 0, K_3(\lambda_{in}, z)]^T$, $TH(\lambda_{in}, z) = [N_1(\lambda_{in}, z), N_2(\lambda_{in}, z), N_3(\lambda_{in}, z)]^T$,

K_3, N_1, N_2, N_3 – компоненты вектор-функций биортогональных преобразований;

$\Omega_n, \|K_{in}\|$ – квадрат нормы ядер преобразований;

j_n, λ_{in} – собственные значения ($n=0, 1, 2, \dots, i=1, 2, 3, \dots$).

В результате получаем выражение для функций $U(r,z,t), W(r,z,t), \Theta(r,z,t)$ в виде спектральных разложений:

$$\begin{aligned}
 U(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} J_1(j_n r) \left[F_k + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-1} \right], \\
 W(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} J_0(j_n r) \left[F_k + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-1} \right], \\
 \Theta(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} J_0(j_n r) \left[F_k + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-1} \right],
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

F_k – матрица-столбец стандартизирующих функций.

Алгоритм решения начально-краевой задачи термоупругости (1)–(3) подробно изложен в [18].

Построенное решение позволяет учесть влияние температурного поля на перемещения, а также зависимость температуры упругой системы от скорости изменения ее объема.

Численный анализ результатов

Численные результаты расчета данной задачи в несвязанной постановке [17] позволяют сделать вывод, что силы инерции упругой системы оказывают влияние на ее напряженно-деформированное состояние только в очень тонких конструкциях ($h^*/b \leq 0.01$, h^* , b – толщина и радиус пластины) при действии высокочастотной нагрузки. Принимая во внимание данные результаты, в работе при решении системы несамосопряженные дифференциальных уравнений классической (СТЕ) теории термоупругости не учитываются силы инерции, т.е. для рассматриваемых конструкций используется ограничение $h^*/b \leq 0.01$.

В качестве примера рассматривается жестко закрепленная круглая пластина ($b = 1$ м), выполненная из стали, имеющая следующие физико-механические характеристики материала: $E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\Lambda = 50$ Вт/(м·К), $\nu = 0.28$, $c_\varepsilon = 3.8 \times 10^6$ Дж/(м³·К), $\alpha_t = 1.2 \times 10^{-5}$ 1/К.

Рассматривается случай действия на верхней лицевой поверхности ($z_* = 0$) температурной нагрузки в виде:

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = (1 - r_*) T_{\max} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(r_*, t_*) = 0,
 \tag{7}$$

$H(\tilde{t})$ – единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$),

$T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^* , t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373$ К (100С), $T_0 = 293$ К (20С)).

На рисунках 2–4 показаны графики изменения температуры $\Theta^*(0, h/2, t)$, компонент вектора перемещений $U^*(0.5, z, t)$, $W^*(0, z, t)$ по времени и аксиальной координате с учетом (сплошная линия), а также без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей ($t_{\max}^* = 10$ с, $t_{\max} = \frac{\Lambda}{b^2 c_\varepsilon} t_{\max}^* = 1.3 \times 10^{-4}$). Температурное поле и напряженно-деформированное состояние анализируются для пластин толщиной $h = 0.1, 0.2$.

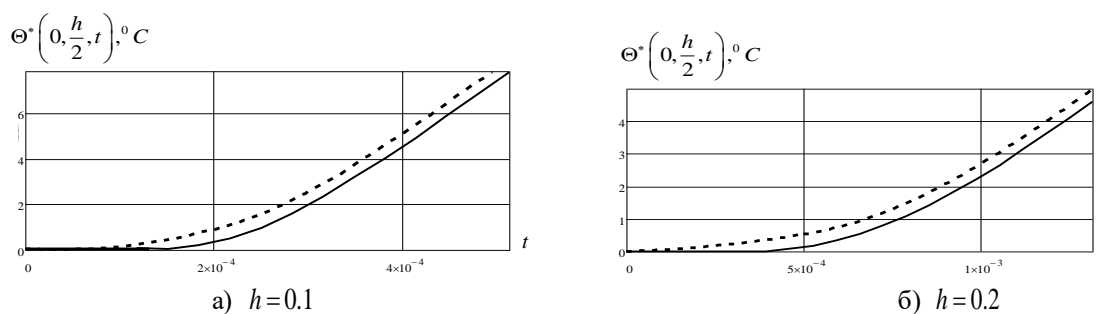


Рис. 2. Графики изменения температуры $\Theta^*(0, h/2, t)$ во времени t

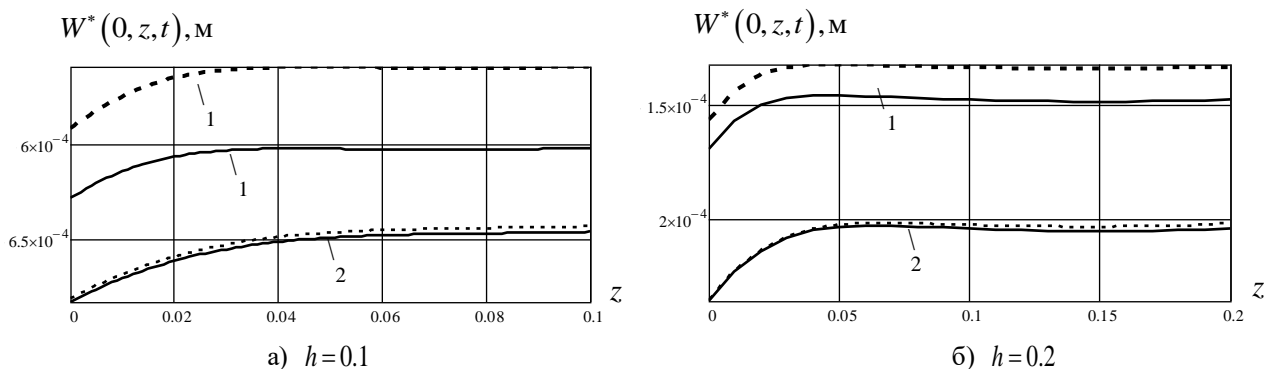


Рис. 3. Графики изменения $W^*(0, z, t)$ по высоте пластины ($1-t = t_{\max}$, $2-t = 5t_{\max}$)

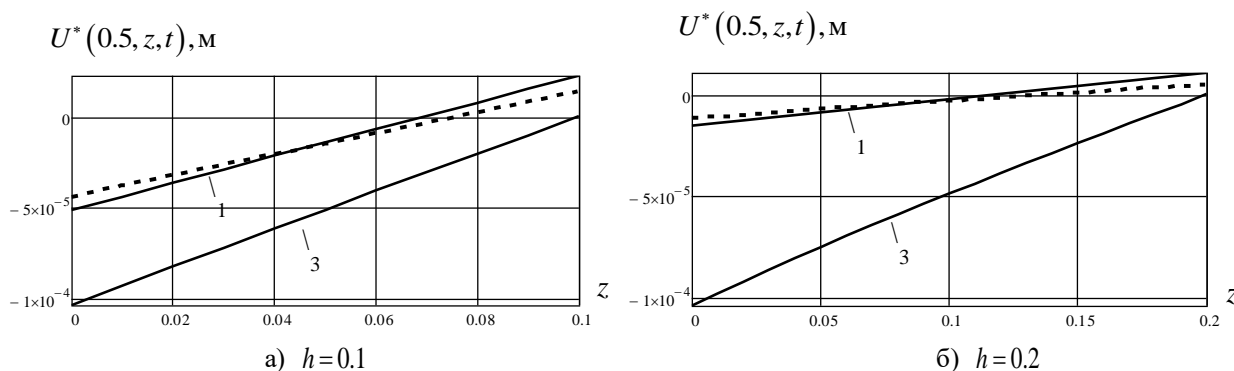


Рис. 4. Графики изменения $U^*(0.5, z, t)$ по высоте пластины ($1-t = t_{\max}$, $3-t = 100t_{\max}$)

Выводы

Анализ результатов расчета позволяет сделать следующие выводы.

– Связанность термоупругих полей при заданной температурной нагрузке приводит к более медленному прогреву пластины в течение времени. При этом скорость изменения объема тела, которая учитывается в уравнении теплопроводности, оказывает существенное влияние на первом этапе исследования температурного режима, когда $t_{\max} < t < 10t_{\max}$. В дальнейшем данный эффект не наблюдается.

– Уменьшение скорости изменения температуры внутри пластины за счет ее дилатации дает увеличение градиентов $\frac{\partial \theta}{\partial r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$, которые используются в исходных дифференциальных уравнениях термоупругости. В результате наблюдается рост численных значений аксиальной компоненты вектора перемещений.

– При заданной температурной нагрузке эффект связанности полей в течение времени уменьшается. Кроме того, в результате прогрева конструкции наблюдается рост перемещений, а при установившемся температурном режиме на нижней лицевой поверхности отсутствуют радиальные перемещения.

– Линейный характер изменения радиальной компоненты вектора перемещений по высоте пластины позволяет сделать вывод, что при решении задач термоупругости для однородных упругих систем с помощью прикладных теорий можно использовать кинематическую гипотезу плоских сечений.

– Численные значения радиальных перемещений при установившемся температурном режиме не зависят от толщины пластины.

Итак, можно сделать вывод, что при расчете конструкций конечных размеров в случае действия высокоскоростной тепловой нагрузки связанность температурных и упругих полей оказывает существенное влияние на ее напряженно-деформированное состояние. При этом данная особенность в большей степени проявляется в тонких пластинах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с. URL: <https://booksee.org/book/442596> (дата обращения: 17.05.2021).
2. Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 6(131). С. 63–69. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ob-odnoy-zadache-termouprugosti-dlya-sploshnogo-tsilindra> (дата обращения: 14.04.2021).
3. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4(2). С. 94–127. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127>
4. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Ревинский Р.А. Прохождение обобщенной ГНП-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, № 1. С. 59–70. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70>
5. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с. URL: <https://booksee.org/book/449634> (дата обращения: 21.04.2021).
6. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // Вестник Самарского гос. ун-та. 2003. № 4(30). С. 112–124. URL: <http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2003web4/mech/200340102.pdf> (дата обращения: 27.05.2021).
7. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 138–154. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15130459> (дата обращения: 30.05.2021).
8. Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественная серия. 2002. № 5. С. 16–38. URL: <http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2002web5/mech/200250101.pdf> (дата обращения: 28.05.2021).
9. Макарова И.С. Решение несвязанной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2012. Т. 28, № 3. С. 191–195. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1088>
10. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с. URL: <https://booksee.org/book/449657> (дата обращения: 30.03.2021).
11. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001226104> (дата обращения: 01.04.2021).
12. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2011. № 2(23). С. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>
13. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1996. № 8. С. 71–81. URL: <http://www.mathnet.ru/links/775c7fd873a4fa5a66ca355d7bec6bf8/ivm1620.pdf> (дата обращения: 01.06.2021).
14. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63. URL: <http://www.mathnet.ru/links/ab7fc09f4b842027dc3121d78b28cddf/ivm5043.pdf> (дата обращения: 26.04.2021).
15. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1955. 668 с. URL: <https://booksee.org/book/579038> (дата обращения: 12.05.2021).
16. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. М.: Едиториал, УРСС, 2004. 296 с. URL: <https://booksee.org/book/787495> (дата обращения: 05.04.2021).
17. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 5(77). С. 1–18. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-5-1761
18. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 191–200. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18

19. Halyna Harmatij, Marta Król, Vasyl Popovycz. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange. *Advances in Pure Mathematics*. 2013(3):430–437. URL: https://file.scirp.org/pdf/APM_2013070811374867.pdf – 30.04.2021.
20. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells. *J. of Thermal Stresses*. 2013;36(11):1200–1216. DOI:10.1080/01495739.2013.819265
21. Verma K.L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method with thermal relaxation time. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2008;37:573–580. URL: <https://publications.waset.org/3226/pdf> – 21.05.2021.

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2021. N 3/48

Mechanics of Deformable Solidswww.dvfu.ru/en/vestnikisDOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-3-1>

Kusaeva Zh.

ZHANSLU KUSAEVA, Postgraduate Student, ResearcherID: AAQ-1159-2020,
 ORCID: 0000-0001-7028-0130, ScopusID: 57216585356, zhkusaeva@mail.ru
Samara State Technical University
 Samara, Russia

Solution of the axisymmetric problem of thermoelasticity for a circular plate with due consideration for the connectivity of thermoelastic fields

Abstract: A new closed solution of the coupled axisymmetric problem of thermoelasticity is constructed for a rigidly fixed circular isotropic plate in the case temperature variations on its front surfaces. It is known that any change in volume of the body affects the temperature field of the structure. Taking this fact into account causes serious mathematical difficulties, and ignoring this leads to significant errors in calculating the stress-strain state of the structure. Most of the previously considered works were solved in such a formulation that the physicomaterial characteristics of the material were considered independent of temperature. However, for a comprehensive analysis of the strength characteristics, it is necessary to take connectivity of thermoelastic fields into account. In this work, the proposed calculation method assumes physical and mechanical characteristics depending on temperature and makes it possible to analyze the effect of temperature load on the temperature field and the stress-strain state of the structure. On the basis of the constructed solution algorithm, specific software has been developed that allows one to analyze the influence of the coupling of thermoelastic fields. The calculated ratios were obtained using the method of finite biorthogonal transformations and are valid for an external temperature effect that is arbitrary in time (boundary conditions for thermal conductivity of the 1st kind). Numerical analysis of the calculation results shows that for a given external temperature effect, the stiffness of an elastic system has a significant effect on its thermoelastic field. At the same time, proper consideration of the rate of volume change of the plate leads to decrease in temperature and mechanical stresses during heating of the plate. In the future, at a constant temperature regime, the connectivity of the fields is not observed. The developed calculation algorithm finds its application in the design of enclosing structures in the form of single-layer and multi-layer plates.

Keywords: round plate, classical theory of thermoelasticity, non-stationary temperature action

Acknowledgments: The reported study was funded by Foundation RFBR and, according to the research project № 20-31-90042

REFERENCES

1. Butkovskiy A.G. Characteristics of systems with distributed parameters. M., Science, 1979, 224 p. URL: <https://booksee.org/book/442596>. – 17.05.2021.
2. Zhornik A.I., Zhornik V.A., Savochka P.A. On a thermoelasticity problem for a solid cylinder. *News of the Southern Federal University. Technical Sciences*. 2012;6:63–69. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ob-odnoy-zadache-termouprugosti-dlya-sploshnogo-tsilindra> –14.04.2021.

3. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D. A. Related dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity. *Bulletin of the Saratov University, Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009;4(2):94–127. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127>
4. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Revinsky R.A. Passage of a generalized GHIII-thermoelastic wave through a waveguide with a heat-permeable wall. *Bulletin of the Saratov University, Ser. Mathematics. Mechanics. Informatika*. 2011;11(1):59–70. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70>
5. Kovalenko A.D. *Introduction to thermoelasticity*. Kiev, Science Duma, 1965, 204 p. URL: <https://booksee.org/book/449634-21.04.2021>.
6. Lychev S.A. The related dynamical problem of thermoelasticity for a finite cylinder. *Bulletin of the Samara State University*. 2003;4(30):112–124. URL: <http://vestnik-samgu.ssau.ru/est/2003web4/mech/200340102.pdf> – 27.05.2021.
7. Lychev S.A., Manzhurov A.V., Usher S.V. Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity. *J. of Russian Academy of Sciences: Mechanics of Solids*. 2010(4):138–154. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15130459>. – 30.05.2021.
8. Lychev S.A., Senitsky Yu.E. Nonsymmetric integral transformations and their applications to problems of viscoelasticity. *Bulletin of Samara State Univ., Natural Science Series*. 2002(5):16–38. URL: <http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2002web5/mech/200250101.pdf> –28.05.2021.
9. Makarova I.S. Solution of an unrelated thermoelasticity problem with boundary conditions of the first kind. *Bulletin of the Samara State Technical Univ., Ser. Phys.-Math. Science*. 2012;28(3):191–195. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1088>
10. Novatsky V. *Dynamic problems of thermoelasticity*. M., World, 1970, 256 p. URL: <https://booksee.org/book/449657>. – 30.03.2021.
11. Podstrigach Ya.S. *Thermal elasticity of bodies of non-uniform structure*. M., Science, 1984, 368 p. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01001226104>. – 01.04.2021.
12. Radaev Yu.N., Taranova M.V. Wave numbers of thermoelastic waves in a waveguide with heat exchange on the side wall. *Bulletin of the Samara State University, Natural Physical and Mathematical Sciences*. 2011;2(23):53–61. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>
13. Senitskiy Y.E. Biorthogonal multi-component finite integral transform and its application to boundary value problems of mechanics. *Proceedings of Universities: Matematika*. 1996(8):71–81. URL: <http://www.mathnet.ru/links/775c7fd873a4fa5a66ca355d7bec6bf8/ivm1620.pdf> – 01.06.2021.
14. Senitsky Yu.E. Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to non-stationary problems of mechanics. *Proceedings of High Schools*. 1991(4):57–63. URL: <http://www.mathnet.ru/links/ab7fc09f4b842027dc3121d78b28cdf/ivm5043.pdf>. –26.04.2021.
15. Sneddon I. N. *Fourier-Transformationen*. M., Verlag für ausländische Literatur, 1955, 668 p. URL: <https://booksee.org/book/579038> – 12.05.2021.
16. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu. *Wave phenomena of thermal conductivity. System-structural approach*. M., Unitorial URSS, 2004, 296 p. URL: <https://booksee.org/book/787495>. –05.04.2021.
17. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Nonstationary axisymmetric problem of thermo-elasticity for a rigidly fixed circular plate. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2018;5(77):1–18. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-5-1761
18. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Nonstationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate. *Bulletin of the PNRPU: Mechanics*. 2019(4):191–200. DOI: 10.15593/perm-mech/2019.4.18
19. Halyna Harmatij, Marta Król, Vasyl Popovycz. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange. *Advances in Pure Mathematics*. 2013(3):430–437. URL: https://file.scirp.org/pdf/APM_2013070811374867.pdf – 30.04.2021.
20. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells. *J. of Thermal Stresses*. 2013;36(11):1200–1216. DOI:10.1080/01495739.2013.819265
21. Verma K.L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method with Thermal relaxation time. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2008;37:573–580. URL: <https://publications.waset.org/3226/pdf> – 21.05.2021.