

Научная статья  
УДК 539.3  
<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2025-1/3-17>

## Неосесимметричная связанная задача термоэлектроупругости для длинного многослойного цилиндра

Дмитрий Аверкиевич Шляхин, Владимир Андреевич Юрин✉

Самарский государственный технический университет,  
Самара, Российская Федерация  
✉ [get8ack@mail.ru](mailto:get8ack@mail.ru)

**Аннотация.** В целях повышения эффективности и точности температурных пьезокерамических датчиков необходима разработка алгоритмов решения различных задач теории термоэлектроупругости. При этом охарактеризовать достаточно слабый эффект связанности между полями различной физической природы становится возможным только путём построения замкнутых аналитических решений. В данной статье рассмотрена задача термоэлектроупругости для длинного многослойного цилиндра, один из слоёв которого изготовлен неизменно из пьезокерамики, а остальные – варьируются по материалу, толщине и расположению в конструкции. На внутренней поверхности цилиндра выполняется граничное условие теплопроводности 1-го рода в виде нестационарного неосесимметричного температурного воздействия. На внешней – задан закон конвективного теплообмена (граничное условие 3-го рода) и постоянная температура окружающей среды. Поверхности пьезокерамического слоя имеют электродное покрытие и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, при этом внутренняя поверхность пьезокерамики заземлена. Ограничение скоростей изменения температурного воздействия и толщины конструкции позволило включить в математическую формулировку задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Начально-краевая задача решена в связанной постановке. При построении замкнутого решения несамосопряжённой системы дифференциальных уравнений последовательно применены косинус- и синус-преобразования Фурье по окружной координате и обобщённые биортогональные конечные интегральные преобразования по радиальной координате. Полученные зависимости позволили описать температурное, электрическое и упругое поля в многослойном цилиндре, а также проанализировать влияние физико-механических характеристик материалов и толщины слоёв конструкции на величину индуцируемого электрического сигнала при неосесимметричном нестационарном температурном воздействии.

**Ключевые слова:** неосесимметричная задача термоэлектроупругости, длинный многослойный цилиндр, пьезокерамика, преобразования Фурье, биортогональные конечные интегральные преобразования  
**Для цитирования:** Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная связанная задача термоэлектроупругости для длинного многослойного цилиндра // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2025. № 1(62). С. 3–17.

Original article

## Non-axisymmetric coupled problem of thermoelectroelasticity for a long multi-layered cylinder

Dmitry A. Shlyakhin, Vladimir A. Yurin✉

Samara State Technical University,  
Samara, Russian Federation  
✉ [get8ack@mail.ru](mailto:get8ack@mail.ru)

© Шляхин Д.А., Юрин В.А., 2025

**Abstract.** To enhance the efficiency and accuracy of temperature piezoceramic sensors, it is essential to develop algorithms for solving various problems of the thermoelectroelasticity theory. Characterizing the relatively weak coupling effect between fields of different physical natures leads to construction of closed analytical solutions. In this article authors consider the problem of thermoelectroelasticity for a long multi-layered cylinder, one layer of which is made permanently from piezoceramics, while the others vary in material, thickness and arrangement within the structure. On the inner surface of the cylinder, a boundary condition of the first kind is applied in the form of a non-stationary non-axisymmetric thermal impact. On the outer surface, a law of convective heat exchange (third kind boundary condition) and a constant ambient temperature are specified. The surfaces of the piezoceramic layer are coated with electrodes and connected to a measuring device with high input resistance, moreover the inner surface of the piezoceramics is grounded. The limitation on the rates of thermal impact and structure thickness changes allowed to use the equations of equilibrium, electrostatics and heat conduction into the mathematical formula. The initial boundary value problem is solved in a coupled formulation. A closed solution to the non-self-adjoint system of differential equations was constructed by using Fourier transforms along the circumferential coordinate and generalized biorthogonal finite integral transforms along the radial coordinate. The resulting dependencies allowed for the description of thermal, electrical and elastic fields in the multi-layered cylinder, as well as the analysis of the influence of the physical and mechanical characteristics of the materials and layer thicknesses on the magnitude of the induced electrical signal under non-axisymmetric non-stationary thermal impact.

**Keywords:** non-axisymmetric problem of thermoelectroelasticity, long multi-layered cylinder, piezoceramics, Fourier transforms, biorthogonal finite integral transforms

**For citation:** Shlyakhin D.A., Yurin V.A. Non-axisymmetric coupled problem of thermoelectroelasticity for a long multi-layered cylinder. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2025, no. 1(62), pp. 3–17. (In Russ.).

## Введение

Эффективность температурных датчиков, схема действия которых основана на явлении прямого пьезоэффекта, определяется размерами и физико-механическими свойствами материала многослойной конструкции [1–2]. Работа таких приборов описывается различными математическими теориями термоэластостатики [3–5]. При этом охарактеризовать зависимость между температурным и электроупругим полями можно только с помощью замкнутых аналитических решений. Их построение, связанное с проблемой интегрирования системы несамосопряжённых дифференциальных уравнений, существенно усложняется при неосесимметричной постановке задач.

Основополагающими решениями для многослойных систем являются результаты, полученные для однородных упругих и электроупругих расчётных схем. На данный момент можно отметить небольшое количество исследований неосесимметричных, в основном статических, задач термоупругости и термоэластостатики. В частности, в статье [6] в рамках прикладной теории тонкостенных элементов решена задача для трехслойной круглой пластины в случае действия температурной и силовой нагрузок на её поверхности. Исследования [7–8] посвящены описанию напряжённо-деформированного состояния длинного сплошного и полого цилиндров под воздействием неоднородного температурного поля. В статье [9] получено аналитическое решение неосесимметричной задачи термоупругости для многослойной среды. В работе [10] рассматриваются термоупругие волны в полой сфере при постоянной температуре и радиальном напряжении. В работах [11–13] исследуются электроупругие и термоупругие тонкостенные конструкции и оболочки под действием как статических, так и динамических нагрузок.

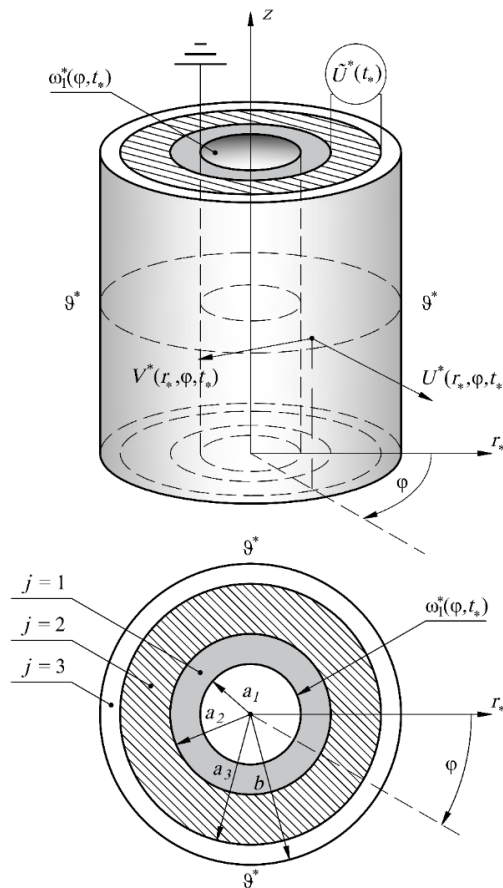
В работах [14–16] рассмотрены нестационарные задачи для функционально-градиентного пьезокерамического длинного цилиндра при отсутствии потенциала на его электродированных поверхностях. В статьях [17–18] описан характер изменения термоэластостатических полей в цилиндре, подверженном температурному и механическому воздействиям. Также можно отметить задачу для длинного пьезокерамического цилиндра под нестационарным температурным воздействием [19], для которой было получено замкнутое решение в несвязанной постановке.

В настоящей работе исследуется неосесимметричная задача термоэластостатики для длинного многослойного цилиндра в случае удовлетворения на его поверхностях гранич-

ных условий теплопроводности 1-го и 3-го родов. Скорость изменения температуры на внутренней поверхности конструкции подбирается таким образом, чтобы инерционные характеристики не оказывали влияния на напряжённо-деформированное состояние упругой системы. Таким образом, исходная начально-краевая задача формируется из уравнений равновесия, электростатики и теплопроводности, а также соответствующих им граничных и начальных условий.

**Постановка задачи**

Рассматривается многослойная, не закреплённая в радиальной плоскости длинная полая конструкция, занимающая в цилиндрической системе координат область  $\Sigma = \{(r_*, \varphi, z_*) | r_* \in [a_1; b], \varphi \in [0; 2\pi), z_* \in R\}$ , см. рис. 1. Для определённости решения цилиндр принимается трёхслойным (далее  $j = 1-3$  – номер слоя, от внутреннего к внешнему), причём средний слой ( $j = 2$ ) состоит из радиально поляризованной пьезокерамики, а наружные слои ( $j = 1, 3$ ) выполнены из изотропных материалов с разными физико-механическими характеристиками.



**Рис. 1. Расчётная схема**  
 Fig. 1. Computational scheme

На внутреннюю цилиндрическую поверхность конструкции ( $r_* = a_1$ ) оказывается нестационарное неосесимметричное температурное воздействие (граничное условие теплопроводности 1-го рода), описываемое функцией температуры  $\omega_1^*(\varphi, t_*)$ . На внешней поверхности ( $r_* = b$ ) протекает конвективный теплообмен (граничное условие теплопроводности 3-го рода) при известной температуре окружающей среды  $\vartheta^*$ . Пьезокерамический слой ( $j = 2$ ) имеет электродное покрытие и подключён к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, при этом его внутренняя поверхность заземлена.

Математическая формулировка задачи в безразмерном виде включает дифференциальные уравнения равновесия, электростатики, теплопроводности и соответствующие начально-краевые условия [20, 21]:

– для радиально поляризованной пьезокерамики ( $j = 2$ ) с гексагональной кристаллической решёткой класса симметрии  $6mm$ :

$$L_{m+1}(U) + L_{m+2}(V) + L_{m+3}(\Phi) + L_{m+4}(\Theta) = 0, \text{ при } m = 0, 4, 8, \quad (2.1)$$

$$L_{13}(\Theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Theta + a_{12} \nabla U + a_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0; \quad (2.2)$$

– для упругого изотропного материала ( $j = 1, 3$ ):

$$L_{m+14}^{(j)}(U) + L_{m+15}^{(j)}(V) + L_{m+16}^{(j)}(\Theta) = 0, \text{ при } m = 0, 3, \quad (2.3)$$

$$L_{13}(\Theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_5^{(j)} \Theta + b_6^{(j)} \left( \nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \right] = 0; \quad (2.4)$$

– начально-краевые условия:

$$r = R: \quad \frac{\partial U}{\partial r} + b_7^{(3)} \frac{1}{R} \left( U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = b_4^{(3)} \omega_1, \quad R \frac{\partial V}{\partial r} - V + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad \Theta = \omega_1; \quad (2.5)$$

$$r = R_1, R_2: \quad \{U, V, \Theta\}_{|r} = \{U, V, \Theta\}_{|-r}, \quad \Phi_{|r=R_2} = \Phi_0, \quad \Phi_{|r=R_1} = 0, \quad (2.6)$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial r} + b_7^{(j)} \left( \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - b_4^{(j)} \Theta \right]_{|r} = b_9^{(j)} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + a_3 \left( \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Theta \right]_{|-r},$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial \varphi} + r \frac{\partial V}{\partial r} - V \right]_{|r} = b_{10}^{(j)} \left[ a_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} + r \frac{\partial V}{\partial r} - V \right) + a_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right]_{|-r}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r}_{|r} = b_{11}^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial r}_{|-r};$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial U}{\partial r} + b_7^{(1)} \left( U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - b_4^{(1)} \Theta = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} - V + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} + b_8^{(1)} \Theta = b_8^{(1)} \vartheta;$$

$$n = 1, 2, 3, \dots: \quad \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=0} = \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=2\pi n},$$

$$\frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi}_{|\varphi=0} = \frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi}_{|\varphi=2\pi n}; \quad (2.8)$$

$$t = 0: \quad U = V = \Phi = \Theta = 0. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.1)–(2.9):  $L_1 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_1}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $L_2 = \frac{1}{r} \left[ (a_2 + a_3) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2)}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,

$$L_3 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_5}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_4 = \frac{a_6}{r} - \nabla, \quad L_5 = \frac{1}{r} \left( a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_6 = a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{a_2}{r^2},$$

$$L_7 = \frac{1}{r} \left( a_4 \frac{\partial}{\partial r} + a_5 \nabla \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_8 = -a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_9 = a_8 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_{10}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{10} = \frac{1}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_{11} = -\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_7}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{12} = a_{11} \nabla, \quad L_{13} = \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{14}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial r} \nabla + b_1^{(j)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L_{15}^{(j)} = \frac{1}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} - b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{16}^{(j)} = -b_4^{(j)} \frac{\partial}{\partial r}, \quad L_{17}^{(j)} = \frac{1}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} + b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{18}^{(j)} = b_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$, \quad L_{19}^{(j)} = -b_4^{(j)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, V, r, R, R_1, R_2\} = \{U^*, V^*, r_*, a, a_1, a_2\} / b, \quad \Phi = \frac{e_{33}}{bC_{33}} \Phi^*,$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\Lambda^{(2)}}{k^{(2)}b^2} t_*, \quad \{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^* - T_0, \omega_1^* - T_0, \vartheta^* - T_0\}; \quad \{a_1, a_2, a_3\} = \{c_{11}, c_{44}, c_{13}\} / c_{33}, \quad a_4 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \\
 a_5 &= \frac{e_{15}}{e_{33}}, \quad a_6 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_7 = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}, \quad \{a_8, a_9, a_{10}\} = \{e_{33}, e_{31}, e_{15}\} \frac{e_{33}}{c_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_{11} = \frac{e_{33}g_3}{\varepsilon_{33}\gamma_{33}}, \quad a_{12} = T_0 \frac{\gamma_{33}^2}{c_{33}k^{(2)}}, \\
 a_{13} &= T_0 \frac{\gamma_{33}g_3}{k^{(2)}e_{33}}, \quad a_{14} = \frac{a_5}{a_2}, \quad a_{15} = \alpha \frac{b}{\Lambda^{(2)}}; \quad b_1^{(j)} = \frac{(1-2\nu^{(j)})}{2(1-\nu^{(j)})}, \quad b_2^{(j)} = \frac{1}{2(1-\nu^{(j)})}, \quad b_3^{(j)} = \frac{(3-4\nu^{(j)})}{2(1-\nu^{(j)})}, \\
 b_4^{(j)} &= \frac{\gamma^{(j)}(1+\nu^{(j)})(1-2\nu^{(j)})c_{33}}{\gamma_{33}(1-\nu^{(j)})E^{(j)}}, \quad b_5^{(j)} = \frac{\Lambda^{(2)}k^{(j)}}{\Lambda^{(j)}k^{(2)}}, \quad b_6^{(j)} = T_0 \frac{\gamma^{(j)}\gamma_{33}}{k^{(2)}c_{33}} \frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(j)}}, \quad b_7^{(j)} = \frac{\nu^{(j)}}{(1-\nu^{(j)})}, \quad b_8^{(1)} = \alpha \frac{b}{\Lambda^{(1)}}, \\
 b_9^{(j)} &= \frac{\gamma_{33}}{\gamma^{(j)}} b_4^{(j)}, \quad b_{10}^{(j)} = 2 \frac{c_{33}(1+\nu^{(j)})}{E^{(j)}}, \quad b_{11}^{(j)} = \frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(j)}}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $U^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $V^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Phi^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Theta^*(r_*, \varphi, t_*)$  – радиальная и угловая компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры тела в размерном виде;  $T_0$  – температура первоначального состояния тела, при которой отсутствуют механические напряжения;  $c_{ms}$ ,  $e_{ms}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33}$  – модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезокерамического материала при  $\{m, s\} = \overline{1, 5}$ ;  $E^{(j)}$ ,  $\nu^{(j)}$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала  $j$ -го слоя;  $\gamma_{11} = c_{11}\alpha_t^{(2)}$ ,  $\gamma_{33} = c_{33}\alpha_t^{(2)}$ ,  $\gamma^{(j)} = E^{(j)}(1-2\nu^{(j)})^{-1}\alpha_t^{(j)}$  – компоненты тензора температурных напряжений;  $\Lambda^{(j)}$ ,  $k^{(j)}$ ,  $\alpha_t^{(j)}$  – коэффициенты теплопроводности, объёмной теплоёмкости и линейного температурного расширения материала;  $g_3$  – компонента тензора пироккоэффициентов;  $\Phi_0 = \Phi_0(t)$  – электрический потенциал, индуцируемый на внешней эквипотенциальной электродированной поверхности пьезокерамического слоя ( $j = 2$ );  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи между поверхностью многослойной конструкции и окружающей воздушной средой.

Соотношения (2.5), (2.7) учитывают отсутствие механических напряжений на наружных поверхностях конструкции, а также краевые условия теплопроводности. Равенства (2.6) являются условиями совместности перемещений, напряжений, температуры, а также идеального теплового контакта на поверхности жёсткого соединения слоёв. Выражения (2.8) определяют условия периодичности для круговой области. В начальный момент времени (2.9) цилиндр находится в недеформированном состоянии, а его температурное поле определяется температурой первоначального состояния  $T_0$ .

В процессе решения задачи  $\Phi_0$  определяется из условия подключения электродированных поверхностей цилиндра к измерительному прибору с большим входным сопротивлением:

$$\frac{\partial}{\partial t_*} \int_0^{2\pi} D_{r|r=R_2} d\varphi = 0, \tag{2.10}$$

где  $D_r(r, \varphi, t)$  – радиальная компонента вектора индукции электрического поля.

### Порядок расчёта

На первом этапе решения задачи (2.1)–(2.9) применяется метод конечных косинус- и синус-преобразований Фурье [22] при использовании трансформант

$$\{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \tag{2.11}$$

$$V_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

и формул обращения

$$\{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (2.12)$$

$$V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} V_H(r, n, t) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

причём ( $n = 0: \Omega_n = (2\pi)^{-1}$ ;  $n \neq 0: \Omega_n = \pi^{-1}$ ).

На следующем этапе преобразований неоднородные граничные условия (2.5)–(2.7) относительно трансформант  $U_H, V_H, \Phi_H, \Theta_H$  приводятся к однородным при использовании разложений:

$$U_H(r, n, t) = \sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + u_H(r, n, t), \quad (2.13)$$

$$V_H(r, n, t) = \sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + v_H(r, n, t),$$

$$\Phi_H(r, n, t) = \sum_{j=1}^3 P_3^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + \phi_H(r, n, t),$$

$$\Theta_H(r, n, t) = \sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + T_H(r, n, t).$$

В выражениях (2.13):  $X^{(1)}(r) = H(r - R_1 - R_2)$ ,  $X^{(2)}(r) = H(r - R_1) - H(r - R_1 - R_2)$ ,  $X^{(3)}(r) = H(R_1 - r)$ ;  $H(\dots)$  – единичная функция Хэвисайда;  $P_1^{(j)}(r, n, t) = \bar{P}_1^{(j)}(r, n, t) + f_{j+24}(r) \Phi_{0H}(n, t)$ ,  $P_2^{(j)}(r, n, t) = \bar{P}_2^{(j)}(r, n, t) + f_{j+27}(r) \Phi_{0H}(n, t)$ ,  $P_3^{(j)}(r, n, t) = \bar{P}_3^{(j)}(r, n, t) + f_{j+30}(r) \Phi_{0H}(n, t)$ ,  $P_4^{(j)}(r, n, t) = f_{j+18}(r) \vartheta_H(n) + f_{j+21}(z) \omega_{1H}(n, t)$ ;  $\bar{P}_1^{(j)}(r, n, t) = f_j(r) \vartheta_H(n) + f_{j+3}(z) \omega_{1H}(n, t)$ ,  $\bar{P}_2^{(j)}(r, n, t) = f_{j+6}(r) \vartheta_H(n) + f_{j+9}(z) \omega_{1H}(n, t)$ ,  $\bar{P}_3^{(j)}(r, n, t) = f_{j+12}(r) \vartheta_H(n) + f_{j+15}(z) \omega_{1H}(n, t)$ ;  $f_1(r) \dots f_{41}(r)$  – дважды дифференцируемые функции;

$$\{\omega_{1H}(n, t), \vartheta_H, \Phi_{0H}\} = \int_0^{2\pi} \{\omega_1(\varphi, t), \vartheta, \Phi_0\} \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Подстановка (2.13) в расчётные соотношения относительно  $U_H, V_H, \Phi_H, \Theta_H$  при выполнении условий

$$r = R: \quad \frac{\partial P_1^{(3)}}{\partial r} + b_7^{(3)} \frac{1}{R} (P_1^{(3)} + nP_2^{(3)}) = b_4^{(3)} \omega_{1H}, \quad R \frac{\partial P_2^{(3)}}{\partial r} - P_2^{(3)} - nP_1^{(3)} = 0, \quad (2.14)$$

$$P_4^{(3)} = \omega_{1H};$$

$$r = R_1, R_2: \{P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_4^{(j)}\}_{|r} = \{P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_4^{(2)}\}_{|r}, \quad P_4^{(2)}|_{r=R_1} = 0, \quad P_4^{(2)}|_{r=R_2} = \Phi_{0H}, \quad (2.15)$$

$$\left[ \frac{\partial P_1^{(j)}}{\partial r} + b_7^{(j)} \left( \frac{P_1^{(j)}}{r} + n \frac{P_2^{(j)}}{r} \right) - b_4^{(j)} P_4^{(j)} \right]_{|r} = b_9^{(j)} \left[ \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial r} + a_3 \left( \frac{P_1^{(2)}}{r} + n \frac{P_2^{(2)}}{r} \right) + \frac{\partial P_3^{(3)}}{\partial r} - P_4^{(3)} \right]_{|r},$$

$$\left[ r \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial r} - P_2^{(j)} - nP_1^{(j)} \right]_{|r} = b_{10}^{(j)} \left[ a_2 \left( r \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial r} - P_2^{(2)} - nP_1^{(2)} \right) - a_5 n P_3^{(2)} \right]_{|r},$$



$$\frac{\partial P_3^{(j)}}{\partial r}_{|+r} = b_{11}^{(j)} \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial r}_{|-r}, \text{ при } j = 1, 3;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} + b_7^{(1)} \left( P_1^{(1)} + nP_2^{(1)} \right) - b_4^{(1)} P_4^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} - P_2^{(1)} - nP_1^{(1)} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{b_8^{(j)}} \frac{\partial P_4^{(1)}}{\partial r} + P_4^{(1)} = \mathfrak{G}_H;$$

позволяет записать начально-краевую задачу относительно функций  $u_H, v_H, \phi_H, T_H$ :

– для слоя пьезокерамики ( $j = 2$ ):

$$\begin{aligned} & \nabla \frac{\partial u_H}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2 n^2)}{r^2} u_H + \frac{n}{r} \left[ (a_3 + a_2) \frac{\partial v_H}{\partial r} - \frac{(a_2 + a_1)}{r} v_H \right] + \\ & + \nabla \frac{\partial \phi_H}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} - \frac{a_5 n^2}{r^2} \phi_H - \nabla T_H + a_6 \frac{T_H}{r} = F_1, \\ & a_2 \nabla \frac{\partial v_H}{\partial r} - (a_1 n^2 + a_2) \frac{v_H}{r^2} - \frac{n}{r} \left( a_2 \nabla u_H + a_3 \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_1 \frac{u_H}{r} \right) - \\ & - \frac{n}{r} \left( a_4 \frac{\partial \phi_H}{\partial r} + a_5 \nabla \phi_H \right) + a_6 n \frac{T_H}{r} = F_2, \\ & - \nabla \frac{\partial \phi_H}{\partial r} + a_7 n^2 \frac{\phi_H}{r^2} + a_8 \nabla \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial u_H}{\partial r} - a_{10} n_2 \frac{u_H}{r^2} + \\ & + \frac{n}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial v_H}{\partial r} - a_{10} \frac{v_H}{r} \right] + a_{11} \nabla T_H = F_3, \\ & \nabla \frac{\partial T_H}{\partial r} - \frac{n^2 T_H}{r^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( T_H + a_{12} \nabla u_H + a_{12} n \frac{v_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right) = F_4; \end{aligned} \quad (2.17)$$

– для упругого изотропного материала ( $j = 1, 3$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \nabla u_H - b_1^{(j)} \frac{n^2}{r^2} u_H + \frac{n}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} - b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) v_H - b_4^{(j)} \frac{\partial T_H}{\partial r} = F_5^{(j)}, \\ & b_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla v_H - \frac{n^2}{r^2} v_H - \frac{n}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} + b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) u_H + b_4^{(j)} n \frac{T_H}{r} = F_6^{(j)}, \\ & \nabla \frac{\partial T_H}{\partial r} - n^2 \frac{T_H}{r^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_5^{(j)} T_H + b_6^{(j)} \left( \nabla u_H + n \frac{v_H}{r} \right) \right] = F_7^{(j)}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

– начально-краевые условия:

$$r = R: \quad \frac{\partial u_H}{\partial r} + b_7^{(3)} \frac{1}{R} (u_H + n v_H) = 0, \quad R \frac{\partial v_H}{\partial r} - v_H - n u_H = 0, \quad T_H = 0; \quad (2.21)$$

$$r = R_1, R_2: \quad \{u_H, v_H, T_H\}_{|+r} = \{u_H, v_H, T_H\}_{|-r}, \quad \phi_H = 0, \quad (2.20)$$

$$\left[ \frac{\partial u_H}{\partial r} + b_7^{(j)} \left( \frac{u_H}{r} + n \frac{v_H}{r} \right) - b_4^{(j)} T_H \right]_{|+r} = b_9^{(j)} \left[ \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_3 \left( \frac{u_H}{r} + n \frac{v_H}{r} \right) + \frac{\partial \phi_H}{\partial r} - T_H \right]_{|-r},$$

$$\left[ r \frac{\partial v_H}{\partial r} - v_H - n u_H \right]_{|+r} = b_{10}^{(j)} \left[ a_2 \left( r \frac{\partial v_H}{\partial r} - v_H - n u_H \right) - a_5 n \phi_H \right]_{|-r},$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial r}_{|+r} = b_{11}^{(j)} \frac{\partial T_H}{\partial r}_{|-r};$$

$$r=1: \frac{\partial u_H}{\partial r} + b_7^{(1)}(u_H + nv_H) - b_4^{(1)}T_H = 0, \quad \frac{\partial V_H}{\partial r} - V_H - nU_H = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial r} + b_8^{(1)}T_H = 0;$$

$$t=0: u_H = u_{0H}, v_H = v_{0H}, \phi_H = \phi_{0H}, T_H = T_{0H}, \quad (2.22)$$

В выражениях (2.17)–(2.22):  $u_{0H} = -\sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(r, n, 0)X^{(j)}(r),$

$$v_{0H} = -\sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(r, n, 0)X^{(j)}(r), \quad \phi_{0H} = -\sum_{j=1}^3 P_3^{(j)}(r, n, 0)X^{(j)}(r), \quad T_{0H} = -\sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(r, n, 0)X^{(j)}(r);$$

$$F_1 = -\nabla \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial r} + \frac{(a_1 + a_2 n^2)}{r^2} P_1^{(2)} - \frac{n}{r} \left[ (a_3 + a_2) \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial r} - \frac{(a_2 + a_1)}{r} P_2^{(2)} \right] - \nabla \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial r} + \frac{a_4}{r} \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial r} - \frac{a_5 n^2}{r^2} P_3^{(2)} + \nabla P_4^{(2)} - a_6 \frac{P_4^{(2)}}{r},$$

$$F_2 = -a_2 \nabla \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial r} + (a_1 n^2 + a_2) \frac{P_2^{(2)}}{r^2} + \frac{n}{r} \left( a_2 \nabla P_1^{(2)} + a_3 \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial r} + a_1 \frac{P_1^{(2)}}{r} \right) + \frac{n}{r} \left( a_4 \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial r} + a_5 \nabla P_3^{(2)} \right) - a_6 n \frac{P_4^{(2)}}{r},$$

$$F_3 = \nabla \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial r} - a_7 n^2 \frac{P_3^{(2)}}{r^2} - a_8 \nabla \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial r} - a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial r} + a_{10} n^2 \frac{P_1^{(2)}}{r^2} - \frac{n}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial r} - a_{10} \frac{P_2^{(2)}}{r} \right] - a_{11} \nabla P_4^{(2)},$$

$$F_4 = -\nabla \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial r} + \frac{n^2 P_4^{(2)}}{r^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( P_4^{(2)} + a_{12} \nabla P_1^{(2)} + a_{12} n \frac{P_2^{(2)}}{r} - a_{13} \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial r} \right), \quad F_5^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r} \nabla P_1^{(j)} + b_1^{(j)} \frac{n^2}{r^2} P_1^{(j)} - \frac{n}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} - b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) P_2^{(j)} + b_4^{(j)} \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial r},$$

$$F_6^{(j)} = -b_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} \nabla P_2^{(j)} + \frac{n^2}{r^2} P_2^{(j)} + \frac{n}{r} \left( b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} + b_3^{(j)} \frac{1}{r} \right) P_1^{(j)} - b_4^{(j)} n \frac{P_4^{(j)}}{r}, \quad F_7^{(j)} = -\nabla \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial r} + n^2 \frac{P_4^{(j)}}{r^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ b_5^{(j)} P_4^{(j)} + b_6^{(j)} \left( \nabla P_1^{(j)} + n \frac{P_2^{(j)}}{r} \right) \right].$$

Решение полученной начально-краевой задачи (2.17)–(2.22) можно получить, применив структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (далее – КИП) [23]. Для этого на сегменте  $[R, 1]$  вводится КИП с неизвестными компонентами вектор-функций ядер преобразований  $K_1(\lambda_{in}, r) \dots K_4(\lambda_{in}, r), N_1(\mu_{in}, r) \dots N_4(\mu_{in}, r)$ :

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_R^1 \left[ m_1 T_H + m_2 \left( j_n u_H + n \frac{v_H}{r} \right) - m_3 \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right] K_4(\lambda_{in}, r) r dr, \quad (2.23)$$

$$\{u_H(r, n, t), v_H(r, n, t), \phi_H(r, n, t), T_H(r, n, t)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{N_1(\mu_{in}, r), N_2(\mu_{in}, r), N_3(\mu_{in}, r), N_4(\mu_{in}, r)\} \|K_{in}\|^{-2},$$

где  $\{m_1, m_2, m_3\} = \{b_5^{(1)}, b_6^{(1)}, 0\} X^{(1)}(r) + \{1, a_{12}, a_{13}\} X^{(2)}(r) + \{b_5^{(3)}, b_6^{(3)}, 0\} X^{(3)}(r);$

$K_k(\lambda_{in}, r) = K_k^{(1)}(\lambda_{in}, r) X^{(1)}(r) + K_k^{(2)}(\lambda_{in}, r) X^{(2)}(r) + K_k^{(3)}(\lambda_{in}, r) X^{(3)}(r)$  при  $k = 1, 2, 4;$

$N_k(\mu_{in}, r) = N_k^{(1)}(\mu_{in}, r) X^{(1)}(r) + N_k^{(2)}(\mu_{in}, r) X^{(2)}(r) + N_k^{(3)}(\mu_{in}, r) X^{(3)}(r)$  при  $k = 1, 2, 4;$

$K_3(\lambda_{in}, r) = K_3^{(2)}(\lambda_{in}, r), N_3(\mu_{in}, r) = N_3^{(2)}(\mu_{in}, r); \|K_{in}\|^2 = \int_0^1 K_4(\lambda_{in}, r) N_4(\mu_{in}, r) r dr;$

$\lambda_{in}, \mu_{in}$  – собственные значения однородных линейных краевых задач относительно сопряжённых  $K_k(\lambda_{in}, r)$  и инвариантных  $N_k(\mu_{in}, r)$  компонент вектор-функций ядер КИП (при  $k = 1 \dots 4$ ).

Алгоритм преобразования КИП для длинного цилиндра, выполненного из упругого изотропного и электроупругого материалов, подробно описан в работах авторов [24, 25].

Окончательные выражения функций  $U(r, \varphi, t), V(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t)$  и  $\Theta(r, \varphi, t)$  при использовании формул обращения (2.23), (2.12) и разложения (2.13) принимают вид:



$$\begin{aligned}
 U(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ \sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (2.24) \\
 V(r, \varphi, t) &= \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(n\varphi) d\varphi, \\
 \Phi(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ \sum_{j=1}^3 P_3^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi, \\
 \Theta(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ \sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(r, n, t) X^{(j)}(r) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_4(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Функции  $P_1^{(j)}(r, n, t) \dots P_4^{(j)}(r, n, t)$  определяются из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений (2.17), (2.18) и удовлетворения условий (2.14)–(2.16) [24, 25].

Потенциал  $\Phi_0(t)$  при заземлении внутренней электропроводной поверхности пьезо-керамического слоя определяет, на основании равенств (2.10) и (2.24), величину электрического напряжения  $\tilde{U}(t) = \Phi_0(t)$ :

$$\tilde{U}(t) = Q_1^{-1} [Q_2(t) + Q_3(t)], \quad (2.25)$$

где  $Q_1 = 2\pi \left[ \frac{df_{32}(r)}{dr} - a_8 \frac{df_{26}(r)}{dr} - a_9 \frac{f_{26}(r)}{r} \right]_{r=R_2}^{n=0}$ ,  $Q_2(t) = \left[ a_8 \frac{\partial \bar{P}_1^{(2)}}{\partial r} + a_9 \frac{\bar{P}_1^{(2)}}{r} + a_{11} P_4^{(2)} - \frac{\partial \bar{P}_3^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=R_2}^{n=0}$ ,

$$Q_3(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_{i0}, 0, t)}{\|K_{i0}\|^2} \left[ a_8 \frac{\partial N_1(\mu_{i0}, r)}{\partial r} + a_9 \frac{N_1(\mu_{i0}, r)}{r} + a_{11} N_4(\mu_{i0}, r) - \frac{\partial N_3(\mu_{i0}, r)}{\partial r} \right]_{r=R_2}.$$

### Анализ результатов

В качестве примера рассматривается длинный полый трёхслойный цилиндр ( $b = 0,02$  м,  $a_2 = 0,0175$  м,  $a_1 = 0,0075$  м,  $a = 0,005$  м,  $\alpha = 5,6$  Вт/(м<sup>2</sup>×К), внешний теплоизоляционный слой которого изготовлен из пластика ( $j = 1$ ), средний – из пьезокерамики состава PZT-4 ( $j = 2$ ), а внутренний – из стали ( $j = 3$ ).

Физико-механические характеристики материалов [17]:

$$\begin{aligned}
 \{c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{55}\} &= \{13,9, 7,43, 11,50, 2,56\} \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \{E^{(1)}, E^{(3)}\} = \{20, 0,33\} \times 10^{10} \text{ Па}, \\
 \{v^{(1)}, v^{(3)}\} &= \{0,28, 0,33\}, \quad \{\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \Lambda^{(3)}\} = \{50, 1,6, 0,2\} \text{ Вт/(м} \times \text{К)}, \quad \{\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \alpha_i^{(3)}\} = \{1,2, 0,4, 8\} \times 10^{-5} \text{ 1/К}, \\
 \{k^{(1)}, k^{(3)}, k^{(3)}\} &= \{3,8, 3, 0,23\} \times 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \times \text{К)}, \quad \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6,45, 5,62\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\
 \{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} &= \{12,7, -5,2, 15,1\} \text{ Кл/м}^2, \quad g_3 = -0,6 \times 10^{-6} \text{ Кл/(м}^2 \times \text{К)}.
 \end{aligned}$$

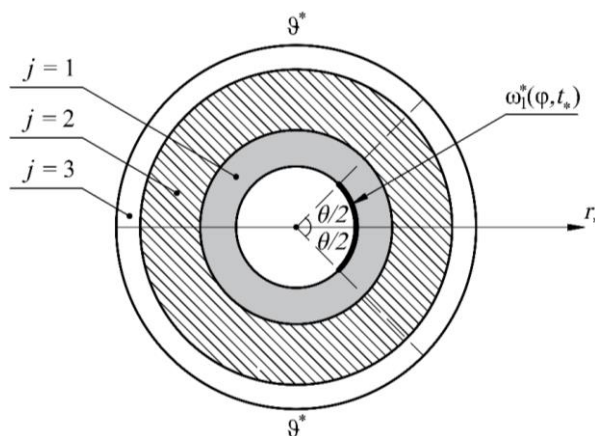
Изменение температуры на внутренней поверхности многослойной конструкции описывается следующей зависимостью:

$$\omega_1^*(\varphi, t_*) = Y(t_*) \left[ H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + T_0 \left[ H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right],$$

где  $Y(t_*) = T_{\max} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$ ;  $\theta$  – участок, величина центрального

угла, на котором происходит изменение температуры  $Y(t_*)$  (см. рис. 2);  $T_{\max}$ ,  $t_{\max}^*$  – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ( $T_{\max} = 373$  К (100°C),  $T_0 = 293$  К (20°C),  $t_{\max}^* = 1$  с).

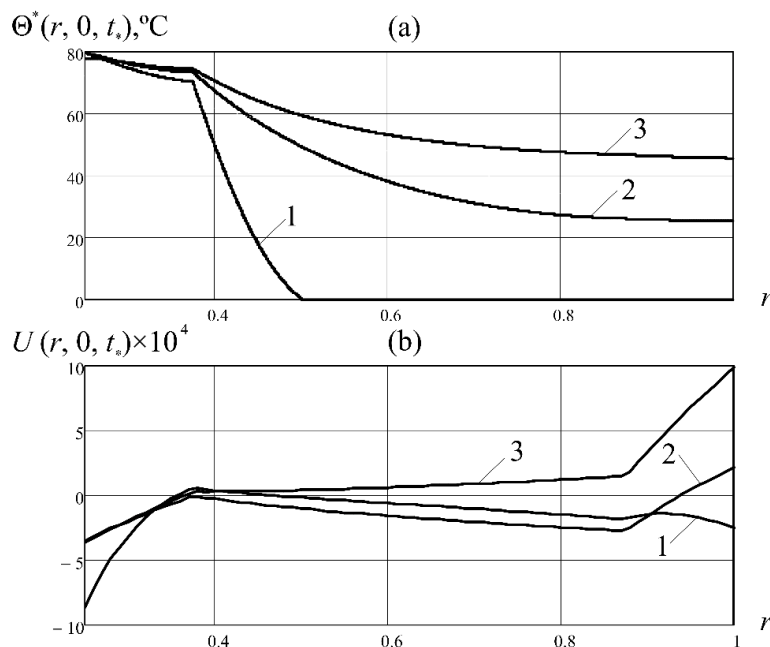
При этом температура внешней среды  $\vartheta^*$  равна первоначальной температуре тела в недеформированном состоянии  $T_0$  (т.е.  $\vartheta = 0$ ).



**Рис. 2. Участок несимметричного температурного воздействия  $\omega^*1$  на внутреннюю поверхность многослойной конструкции**

**Fig. 2. Area of the non-axisymmetric temperature impact  $\omega^*1$  on the inner surface of the multi-layered construction**

На рисунке 3 изображены графики приращения температуры  $\Theta^*(r, 0, t_*)$ , а также перемещений вдоль радиуса  $U(r, 0, t_*)$  по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени, а на рисунке 4 показаны графики изменения  $\Theta^*(r, \varphi, t_*)$ ,  $U(r, \varphi, t_*)$  и окружных перемещений  $V(r, \varphi, t_*)$  соответственно по угловой координате  $\varphi$  при установившемся температурном поле на внутренней и внешней поверхностях многослойной конструкции.



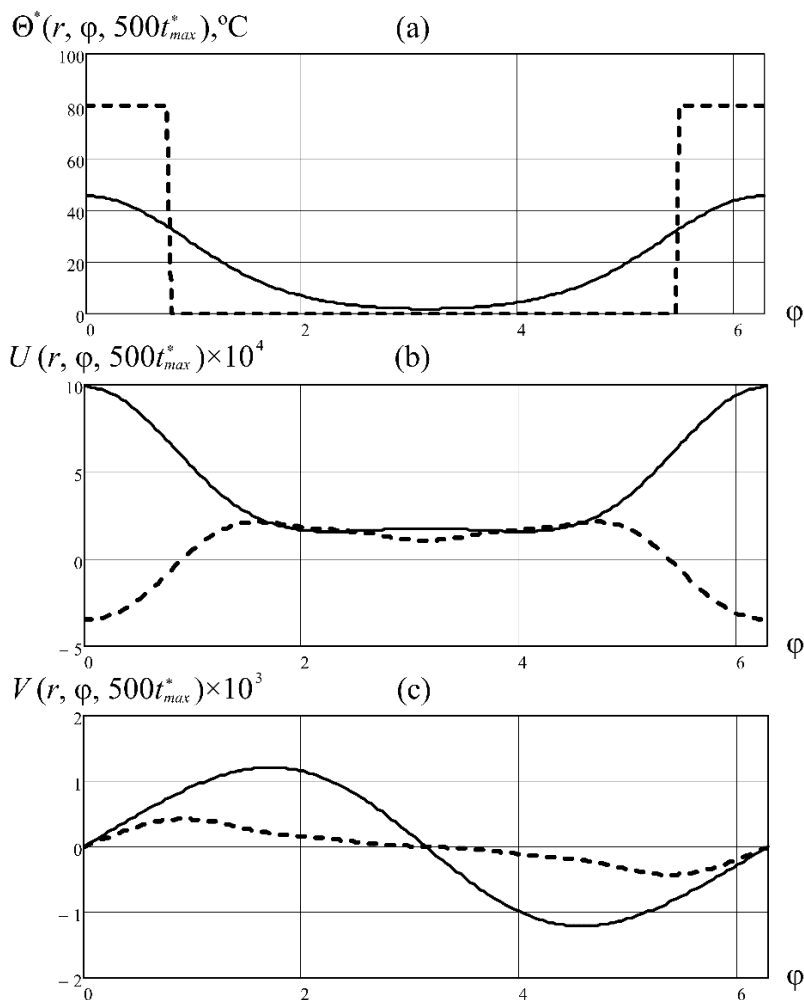
**Рис. 3. Зависимости (а)  $\Theta^*$  и (б)  $U$  от  $r$  при: 1 -  $t^*=t^*_{max}$ ; 2 -  $t^*=100t^*_{max}$ ; 3 -  $t^*=500t^*_{max}$**

**Fig. 3. (a)  $\Theta^*$  and (b)  $U$  depending on  $r$  for: 1 -  $t^*=t^*_{max}$ ; 2 -  $t^*=100t^*_{max}$ ; 3 -  $t^*=500t^*_{max}$**

Анализ результатов расчёта позволяет сделать следующие выводы:

– внутренний слой из стали имеет высокую теплопроводность и прогревается доста-

точно быстро при  $t_* = 100t_{\max}^*$ . При этом в остальной части конструкции, за счёт высоких теплоизоляционных свойств пластика, установившееся температурное поле наблюдается при  $t_* = 500t_{\max}^*$  (см. рис. 3а);



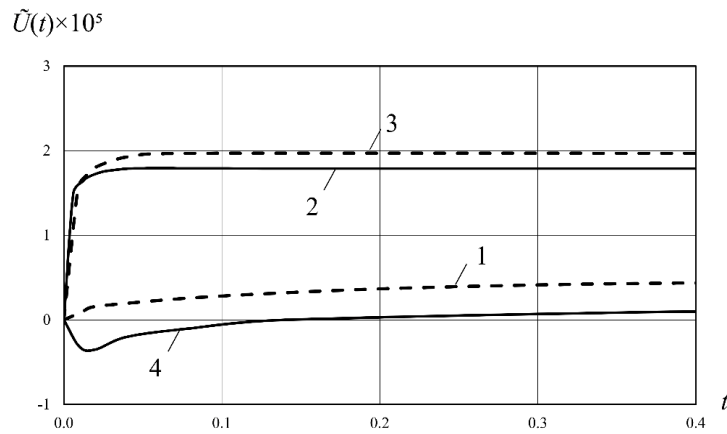
**Рис. 4. Зависимости (а)  $\theta^*$ , (б)  $U$  и (с)  $V$  от  $\varphi$ :  
сплошная линия –  $r=1$ ; пунктир –  $r=R$**   
Fig. 4. (a)  $\theta^*$ , (b)  $U$  and (c)  $V$  depending on  $\varphi$ :  
solid line –  $r=1$ ; dotted line –  $r=R$

– изменение температуры на части внутренней поверхности конструкции (рис. 4а, пунктирная линия) приводит к повышению температуры практически на всей внешней поверхности (см. рис. 4а, сплошная линия);

– высокие коэффициенты линейного температурного расширения стали и пластика обеспечивают большие значения, по сравнению с пьезокерамическим материалом, относительных деформаций  $\epsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}$  в соответствующих слоях конструкции (см. рис. 3б);

– при установившемся температурном режиме ( $t_* = 500t_{\max}^*$ ) увеличение толщины конструкции наблюдается в основном на участке температурного воздействия, а угловые перемещения определяются двумя полуволнами вдоль окружной образующей (см. рис. 4б, 4с).

На рисунке 5 приведены графики изменения электрического напряжения  $\mathcal{U}^0(t)$  (2.25) между электродированными поверхностями пьезокерамического слоя по времени  $t$  при различной компоновке слоёв электроупругой конструкции. Цифрами от 1 до 4 обозначены результаты для различных наборов слоёв (толщины слоёв во всех вариантах одинаковы).



**Рис. 5. Зависимость  $\tilde{U}$  от  $t$ :**

**1) один пьезокерамический слой; 2) три слоя – сталь, пьезокерамика, пластик;  
3) два слоя – сталь (внутри), пьезокерамика; 4) два слоя – пьезокерамика, пластик (снаружи)**

Fig. 5.  $\tilde{U}$  depending on  $t$ :

1) piezoceramic layer only; 2) three layers – steel, piezoceramics, plastic;  
3) two layers – steel (inside), piezoceramics; 4) two layers – piezoceramics, plastic (outside)

Поскольку при сплошном электродном покрытии напряжение  $\tilde{U}(t)$  определяется осесимметричной составляющей разложения (2.24), то для выбора конструкции, позволяющей наиболее эффективно преобразовывать внешнее температурное воздействие в электрический сигнал, удобнее всего пользоваться следующей характеристикой сжатия пьезокерамического слоя:

$$F(t) = \frac{U(R_2, 0, t)|_{n=0} - U(R_1, 0, t)|_{n=0}}{R_2 - R_1}.$$

В настоящем примере максимальные значения функции  $F(t)$  для различных конструкций, согласно рисунку 5, имеют следующие величины: 1)  $3,68 \times 10^{-5}$ ; 2)  $9,01 \times 10^{-5}$ ; 3)  $9,26 \times 10^{-5}$ ; 4)  $3,11 \times 10^{-5}$ . Сравнение результатов для амплитудных значений функций  $F(t)$  и  $\tilde{U}(t)$  подтверждает справедливость данного утверждения.

### Заключение

Результаты расчёта показывают, что наличие в конструкции датчика слоя из стали, имеющей высокий коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha_t^{(3)}$ , приводит, по сравнению с другими вариантами конструктивного решения, к росту амплитудных значений электрического напряжения  $\tilde{U}(t)$ . Использование в конструкции слоя из пластика не приводит к увеличению значений  $\tilde{U}(t)$ , поэтому данный материал можно использовать только как теплоизоляционный.

Наконец, алгоритм решения задачи термоэлектроупругости, разработанный в данной работе, позволяет при необходимости рассмотреть иные конструктивные решения температурных датчиков с различным количеством упругих и электроупругих слоёв произвольной толщины.

### ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

Д.А. Шляхин – разработка концепции исследования, постановка задачи, разработка алгоритма решения; В.А. Юрин – выполнение расчёта, математические преобразования, оформление; Д.А. Шляхин, В.А. Юрин – анализ результатов; подготовка и редактирование текста. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

D.A. Shlyakhin – development of the research concept, formulation of the problem, development of the algorithm of the solution; V.A. Yurin – calculation, mathematical transforms, design; D.A. Shlyakhin, V.A. Yurin – analysis of the results; preparation and editing of the text. All authors reviewed the results and approved the final version of the manuscript.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | DISCLOSURE

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.  
The authors declare no conflict of interest.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // Датчики и системы. 2009. № 2. С. 9–11. EDN: JWYALN.
2. Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 72–82. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>
3. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // International Journal of Solids and Structures. 1974. Vol. 10(6). P. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
4. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1967. Vol. 15(5). P. 299–309. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>. EDN: XRWGQG 7
6. Нестерович А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трёхслойной пластины // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 2(27). С. 54–60. EDN: WDGLPR
7. Куликов И.С., Ширвель П.И. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для неравномерно нагретого длинного цилиндра в условиях ползучести // Вестник БНТУ. 2009. № 4. С. 75–80. EDN: WHRKZN
8. Tokovyy Yu., Ma C.-C. Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders // Journal of Engineering Mathematics. 2008. Vol. 61. P. 171–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-007-9154-6>
9. Zhi Yong Ai, Wei Yong Feng, Yong Zhi Zhao. Analytical layer element analysis for non-axisymmetric problem of multilayered thermoelastic media // Computers and Geotechnics. 2022. Vol. 147. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2022.104759>
10. Hafed Z.S., Zenkour A.M. Refined generalized theory for thermoelastic waves in a hollow sphere due to maintained constant temperature and radial stress // Case Studies in Thermal Engineering. 2025. Vol. 68. Art. 105905. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2025.105905>
11. Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Senin A.N., Matveenko V.P. Free vibration of electroelastic thin-walled structures under static load // International Journal of Solids and Structures. 2025. Vol. 306. P. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.113123>
12. Ji Qi, Ran Teng, H. Elhosiny Ali, Mohammad Arefi. A general electroelastic analysis of piezoelectric shells based on levy-type solution and eigenvalue-eigenvector method // Heliyon. 2023. Vol. 9(7). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e17634>
13. Ke Liang, Qiuyang Hao, Zheng Li, Qian Cheng. A study on solid-shell finite element formulations applied to nonlinear thermoelastic analysis of thin-walled structures // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 205. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112546>
14. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads // Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70(1). P. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1509484>
15. Atrian A., Fesharaki J.J., Majzoobi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads // International J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering. 2011. Vol. 5(11). P. 2441–2444. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>
16. Dai H.L., Luo W.F., Dai T. Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell // Composite Structures. 2017. Vol. 162. P. 411–423. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.04.011>

- <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
17. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // *Journal of Wood Science*. 2016. Vol. 62. P. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>
  18. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // *Journal of Thermal Stresses*. 2017. Vol. 41(6). P. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>
  19. Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2023. № 7. С. 677–691. DOI: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>
  20. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970, 307 с.
  21. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988, 470 с.
  22. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Иностранная литература, 1955, 668 с.
  23. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Математика*. 1996. № 8. С. 71–81.
  24. Шляхин Д.А., Юрин В.А., Ратманова О.В. Связанная неосесимметричная нестационарная задача термоупругости для длинного цилиндра // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 90. С. 152–166. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/90/13>
  25. Shlyakhin D.A., Yurin V.A. Non-axisymmetric coupled unsteady thermoelectroelasticity problem for a long piezoceramic cylinder // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59(2). P. 781–792. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002565442360232X>

## REFERENCES

1. Ionov B.P., Ionov A.B. Statistic-spectral approach to noncontact temperature measurement. *Sensors and Systems*, 2009, vol. 2, pp. 9–11. (In Russ.).
2. Pan'kov A.A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro luminescent ber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, vol. 2, pp. 72–82. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>
3. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1974, vol. 10(6), pp. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
4. Lord H.W., Shulman Y.A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, vol. 15(5), pp. 299–309. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>
6. Nesterovich A.V. The nonaxisymmetric termoforces deformation of the circular sandwich plate in the plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2016, vol. 2(27), pp. 54–60. (In Russ.).
7. Kulikov I.S., Shirvel P.I. Solution of anti-symmetric thermo-elastic problem for non uniformly heated long cylinder under creeping conditions. *Vestnik BNTU*, 2009, vol. 4, pp. 75–80. (In Russ.).
8. Tokovyy Yu., Ma C.-C. Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders. *Journal of Engineering Mathematics*, 2008, vol. 61, pp. 171–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-007-9154-6>
9. Zhi Yong Ai, Wei Yong Feng, Yong Zhi Zhao. Analytical layer element analysis for non-axisymmetric problem of multilayered thermoelastic media. *Computers and Geotechnics*, 2022, vol. 147. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2022.104759>
10. Hafed Z.S., Zenkour A.M. Refined generalized theory for thermoelastic waves in a hollow sphere due to maintained constant temperature and radial stress. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2025, vol. 68, art. 105905. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2025.105905>
11. Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Senin A.N., Matveenko V.P. Free vibration of electroelastic thin-walled structures under static load. *International Journal of Solids and Structures*, 2025, vol. 306, pp. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.113123>
12. Ji Qi, Ran Teng, H. Elhosiny Ali, Mohammad Arefi. A general electroelastic analysis of piezoelectric shells based on levy-type solution and eigenvalue-eigenvector method. *Heliyon*, 2023, vol. 9(7). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e17634>



13. Ke Liang, Qiuyang Hao, Zheng Li, Qian Cheng. A study on solid-shell finite element formulations applied to nonlinear thermoelastic analysis of thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, 2024, vol. 205. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112546>
14. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, vol. 70(1), pp. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1509484>
15. Atrian A., Fesharaki J.J., Majzooobi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads. *International J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2011, vol. 5(11), pp. 2441–2444. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>
16. Dai H.L., Luo W.F., Dai T. Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a uid lled FGPM cylindrical thin-shell. *Composite Structures*, 2017, vol. 162, pp. 411–423. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
17. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic elds in piezoelectric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *Journal of Wood Science*, 2016, vol. 62, pp. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>
18. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermoelectroelastic eld in piezo electric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *Journal of Thermal Stresses*, 2017, vol. 41(6), pp. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>
19. Shlyakhin D.A., Yurin V.A. Non-axisymmetric non-stationary problem of thermoelectroelasticity for a long piezoceramic cylinder. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2023, vol. 7, pp. 677–691. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>
20. Kovalenko A.D. Fundamentals of thermoelasticity. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1970. 307 p. (In Russ.).
21. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive solids. Moscow, Nauka Publ., 1988. 470 p. (In Russ.).
22. Sneddon I.N. Fourier Transforms. New York, McGraw-Hill Book Company, 1951. 542 p. (Russ. ed.: Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1955. 668 p.).
23. Senitsky Y.E. Biorthogonal multicomponent nite integral transformation and its application to boundary value problems of mechanics. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 8, pp. 71–81. (In Russ.).
24. Shlyakhin D.A., Yurin V.A., Ratmanova O.V. A coupled non-axisymmetric non-stationary problem of the thermoelasticity of a long cylinder. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2024, vol. 90, pp. 152–166. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/90/13>
25. Shlyakhin D.A., Yurin V.A. Non-axisymmetric coupled unsteady thermoelectroelasticity problem for a long piezoceramic cylinder. *Mechanics of Solids*, 2024, vol. 59(2), pp. 781–792. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002565442360232X>

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Шляхин Дмитрий Аверкиевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты», Самарский государственный технический университет (Самара, Российская Федерация).

✉ [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru); <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

**Dmitry A. Shlyakhin**, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations, Samara State Technical University (Samara, Russian Federation).

**Юрин Владимир Андреевич** – аспирант, ассистент кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты», Самарский государственный технический университет (Самара, Российская Федерация).

✉ [get8ack@mail.ru](mailto:get8ack@mail.ru); <https://orcid.org/0009-0008-7412-9540>

**Vladimir A. Yurin**, Post-Graduate Student, Assistant of Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations, Samara State Technical University (Samara, Russian Federation).

Статья поступила в редакцию / Received: 23.12.2024.

Доработана после рецензирования / Revised: 09.03.2025.

Принята к публикации / Accepted: 18.03.2025.