

Научная статья  
УДК 539.3  
<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2024-4/31-39>

## Моделирование волновых процессов в толстостенной вязкоупругой сферической оболочке при импульсном воздействии

Сергей Гургенович Саиян<sup>1,2,✉</sup>, Константин Анатольевич Модестов<sup>1,3</sup>, Олег Андреевич Брыгар<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup> Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация

✉ berformert@gmail.com

**Аннотация.** В статье исследуется задача о распространении продольных волн в толстостенной вязкоупругой сферической оболочке при импульсном воздействии на ее внутреннюю поверхность. В работе предлагается численно-аналитическое решение задачи с использованием преобразования Лапласа. Модель вязкоупругости описывается через оператор модуля сдвига релаксирующего по модели Кельвина – Фойгта без учета релаксации объемного модуля. Авторы выделяют важные аспекты, такие как необходимость учета высокочастотных колебаний и инерционных эффектов, возникающих при импульсных воздействиях. Вязкоупругие материалы демонстрируют сложное поведение, зависимое от времени и частоты приложения нагрузки, что требует использования соответствующих моделей поведения. В статье представлены графики зависимости перемещений от радиальной переменной при различных временных интервалах, что позволяет лучше понять реакцию вязкоупругой оболочки под воздействием импульсной нагрузки. Результаты исследования могут быть полезны в разработке конструкций, подверженных значительным кратковременным нагрузкам (импульсным воздействиям), таких как резервуары высокого давления, трубопроводы, реакторы и т.д.

**Ключевые слова:** толстостенная оболочка, вязкоупругость, сферическая оболочка, преобразование Лапласа, импульсное воздействие

**Финансирование:** Работа (Саияна С.Г.) выполнена за счет гранта РНФ № 24-49-02002.

**Для цитирования:** Саиян С.Г., Модестов К.А., Брыгар О.А. Моделирование волновых процессов в толстостенной вязкоупругой сферической оболочке при импульсном воздействии // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4(61). С. 31–39.

Original article

## Modeling of wave processes in a thick-walled viscoelastic spherical shell under impulse load

Sergey G. Saiyan<sup>1,2,✉</sup>, Konstantin A. Modestov<sup>1,3</sup>, Oleg A. Brygar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup> Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

✉ berformert@gmail.com

**Abstract.** The article investigates the problem of propagation of longitudinal waves in a thick-walled viscoelastic spherical shell under impulse load on its inner surface. The paper presents a numerical-analytical solution to the problem using the Laplace transform. The viscoelasticity model is described through the shear modulus operator relaxing according to the Kelvin – Voigt model without taking into account the relaxation of the volumetric module. The authors highlight important aspects, such as the need to take into account high-frequency oscillations and inertial effects arising from impulse load. Viscoelastic materials exhibit complex behavior depending on the time and frequency of load application, which requires the use of appropriate behaviors. The article presents graphs of the dependence of displacements on a radial variable at different time intervals, which allows us to better understand the reaction of a viscoelastic shell under the influence of a pulsed load. The results of the study can be useful in the development of structures subject to significant short-term loads (pulse effects), such as high-pressure tanks, pipelines, reactors, etc.

**Keywords:** thick-walled shell, viscoelasticity, spherical shell, Laplace transform, impulse load

**Foundation:** Work (Saiyan S.G.) was supported by the Russian Science Foundation grant № 24-49-02002.

**For citation:** Saiyan S.G., Modestov K.A., Brygar O.A. Modeling of wave processes in a thick-walled viscoelastic spherical shell under impulse load. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2024, no. 4(61), pp. 31–39. (In Russ.).

## Введение

Толстостенные оболочки широко используются в различных инженерных конструкциях, таких как резервуары высокого давления, трубопроводы, реакторы, корпуса подводных лодок и космических аппаратов [1–4]. В этих конструкциях оболочки подвергаются сложным нагрузкам, включая высокое давление, температурные градиенты и механические напряжения. Надежность и долговечность таких конструкций напрямую зависят от правильного расчетного анализа и проектирования оболочек для обеспечения механической безопасности. Ошибки в процессе разработки могут привести к катастрофическим последствиям, включая утечки, разрушения или даже аварии, что особенно важно для объектов, работающих с опасными веществами или в условиях высоких рисков.

Толстостенные оболочки часто используются в конструкциях, где требуется высокая прочность и устойчивость к деформациям. Преимущества таких оболочек заключаются в том, что они позволяют равномерно распределить напряжения, обладают высокой устойчивостью к внутреннему давлению, обладают повышенной жесткостью, а также являются более экономичным с точки зрения материалоемкости. Примерами подобных конструкций являются трубопроводы высокого давления, резервуары для хранения жидкостей и газов (например, сжиженного природного газа), а также корпусные элементы в машиностроении и судостроении.

Таким образом, актуальность исследований толстостенных оболочек обусловлена их широким применением в критически важных и высокотехнологичных областях, где прочность, устойчивость к экстремальным условиям и долговечность конструкций имеют первостепенное значение. Развитие новых материалов, таких как композиты и сплавы, а также прогресс в аддитивных технологиях производства требуют пересмотра классических подходов к анализу толстостенных оболочек. Исследования в этой области позволяют разрабатывать новые методы расчета и оптимизации конструкций, учитывающие особенности современных материалов. К таким особенностям можно отнести значительное проявление вязкоупругих свойств материалов.

Задача моделирования импульсного воздействия на толстостенную сферическую оболочку в постановке вязкоупругости имеет несколько специфических аспектов, которые делают ее уникальной и сложной. В отличие от тонкостенных оболочек, в толстостенной оболочке возникают значительные градиенты напряжений и деформаций по толщине, что требует учета пространственного распределения этих величин. Импульсное воздействие предполагает короткие по времени и высокоэнергетические нагрузки, что требует учета инерционных эффектов и волновых процессов в оболочке. Также импульсное воздействие может приводить к возбуждению высокочастотных колебаний, что требует детального временного анализа и применения методов, устойчивых к численным колебаниям.

Что касается учета свойств вязкоупругости, такие материалы демонстрируют поведение, которое зависит от времени (релаксация напряжений, ползучесть) и частоты приложения нагрузки. Моделирование требует использования соответствующих конститутивных уравнений (например, моделей Максвелла, Кельвина – Фойгта и др.). Также стоит учитывать, что вязкоупругие материалы обладают памятью, то есть их текущее состояние зависит не только от текущих условий, но и от предыстории деформаций и напряжений. Это требует использования интегральных уравнений или дифференциальных уравнений с памятью (например, уравнения с интегральными ядрами).

Также задача в такой постановке является трудоемкой и для численной реализации. Для решения задачи требуется интеграция временных и пространственных уравнений, что в условиях вязкоупругости является непростой задачей. Необходимы устойчивые и точные численные методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ) или метод конечных разностей (МКР), способные адекватно учитывать все аспекты задачи. Моделирование вязкоупругого отклика толстостенной оболочки при импульсном воздействии требует значительных вычислительных ресурсов из-за необходимости учета сложных пространственно-временных зависимостей и многокомпонентных материалов.

Все эти аспекты делают задачу моделирования импульсного воздействия на толстостенную сферическую оболочку в постановке вязкоупругости весьма сложной и специфической, требующей глубокого знания как механики деформируемого твердого тела, так и методов численного моделирования.

Многими учеными проводились исследования вязкоупругих толстостенных оболочек. Так, в работе [5] исследовались дифференциальные уравнения движения и краевые условия для трехслойной вязкоупругой сферической оболочки с несимметричной структурой пакета слоев в предположении, что толщина среднего слоя значительно превышает толщины внешних слоев. В работе [6] были рассмотрены радиальные колебания вязкоупругой изотропной пустотелой сферы, где были построены кривые зависимости собственных частот от отношения толщины сферы к ее радиусу. Авторами [7] рассматривалась задача о столкновении двух упругих и вязкоупругих сферических оболочек. В работе [8] исследовалась задача об устойчивости вязкоупругих сферических оболочек, зависящей от времени и скорости при силовом воздействии. В книге Achenbach [9] рассмотрен случай распространения продольных волн в сферической оболочке. В диссертации [10] проведено исследование напряженно-деформированного состояния многослойных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек при импульсном нагружении по поверхности.

В рамках настоящей работы исследуется распространение продольных волн в толстостенной вязкоупругой сферической оболочке при импульсном воздействии. Научная новизна данной работы заключается в исследовании распространения импульсного воздействия в вязкоупругой сферической оболочке с бесконечно большим внешним радиусом и сферическим вырезом с центром в начале координат.

## Материалы и методы

Рассматривается вязкоупругая сферическая оболочка с бесконечно большим внешним радиусом и сферическим вырезом с центром в начале координат, на внутреннюю часть которой в начальный момент времени прикладывается импульсное воздействие (рис. 1).

Для получения функции перемещений, зависящей от радиус-вектора и времени, будет использоваться преобразование Лапласа по времени:

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (1)$$

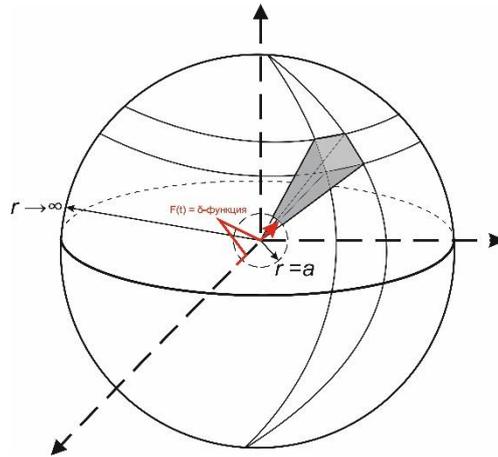
где:  $f^*(p)$  – это образ по Лапласу.

Используя центральную симметрию рассматриваемой задачи, получим выражения для деформаций:

$$\varepsilon_{\bar{r}\bar{r}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = u'_r; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r} = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

Где:  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$  – радиальная, окружная и кольцевая относительные деформации соответственно;

$u_{\bar{r}}, u_\theta, u_\varphi$  – компоненты перемещений: радиальное, окружное и кольцевое (ввиду наличия лишь радиального перемещения в рассматриваемой задаче в дальнейшем перемещение  $u_{\bar{r}}$  будет обозначаться просто  $u$ ).



**Рис. 1. Сферическая вязкоупругая оболочка с бесконечно большим внешним радиусом и сферическим вырезом с центром в начале координат при импульсном воздействии на внутреннюю часть**

**Fig. 1. Spherical viscoelastic shell with infinitely large outer radius and spherical cutout centered at the origin under impulse action on the inner part**

Из закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где:  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$\lambda, \mu$  – параметры Ламе;

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi},$$

получим выражения для радиального ( $\sigma_{rr}$ ), окружного ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) и кольцевого ( $\sigma_{\varphi\varphi}$ ) напряжений:

$$\sigma_{rr} = \lambda \left( u' + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu u'; \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left( u' + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r}. \quad (5)$$

Радиальное уравнение равновесия в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где:  $\rho$  – плотность,  $t$  – время.

Ввиду сферической симметрии остальные уравнения удовлетворяются тождественно, а уравнение (6) упрощается:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Подставляя полученные ранее выражения для напряжений и деформаций, получим:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Краевое условие на внутренней части сферической оболочки имеет вид:

$$\sigma_{rr}(r = a, t) = q \cdot \delta(t), \quad (9)$$

где:  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака;

$a$  – радиус выреза;

$q$  – импульс силы к единице площади.

В совокупности с условием отсутствия бесконечных напряжений в бесконечно удаленной точке уравнения (8), (9) представляют собой краевую задачу для рассматриваемого случая.

Применяя преобразование Лапласа (1) по времени к (8) – (9) и выражая  $\sigma_{rr}$  через  $u$ , получим:

$$c_l^2 \left( \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \left( r^2 \cdot \tilde{u}(r) \right) \right) \right) = p^2 \cdot \tilde{u}(r), \quad (10)$$

$$\left( c_l^2 - 2c_t^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \cdot \tilde{u}(r, p) \right] + 2c_t^2 \cdot \frac{d}{dr} \left[ \tilde{u}(r, p) \right] \Big|_{r=a} = \frac{q}{\rho}, \quad (11)$$

$$\tilde{u}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (12)$$

где:

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (13)$$

– квадраты скоростей продольной и поперечной волн соответственно,  $\tilde{u}(r, p)$

– лапласовский образ (преобразование Лапласа от функции  $u(r, t)$ ).

Решением уравнения (10) является функция:

$$\tilde{u}(r) = \frac{c_1 e^{\frac{pr}{c_l}} (-pr + c_l)}{r^2} + \frac{c_2 e^{-\frac{pr}{c_l}} (pr + c_l)}{r^2}. \quad (14)$$

С учетом условия (11) решение представимо в виде:

$$\tilde{u}(r) = c_2 \frac{e^{-\frac{rp}{c_l}} (pr + c_l)}{r^2}. \quad (15)$$

Из условия (12) найдем  $c_2$ :

$$c_2 = - \frac{e^{\frac{ap}{c_l}} a^3 q}{\left( a^2 c_l p^2 + 4ac_t^2 p + 4c_l c_t^2 \right) \rho}. \quad (16)$$

Окончательное решение в пространстве Лапласа получим в виде:

$$\tilde{u}(r) = - \frac{qa^3 (rp + c_l) e^{-\frac{c_l r}{a}}}{r^2 \rho (a^2 c_l p^2 + 4ac_t^2 p + 4c_l c_t^2)}. \quad (17)$$

Применяя к (17) обратное преобразование Лапласа, можно получить решение рассматриваемой задачи в виде несобственного интеграла:

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde{u}(r,p) e^{pt} dp, \quad (18)$$

где  $c$  должно быть выбрано таким, что контур интегрирования в (18) лежит правее всех особых точек подынтегральной функции.

Для дальнейшего численного анализа полученного решения необходимо задаться определенной моделью вязкоупругости. Наиболее часто оператор сдвига  $\hat{\mu}$  задается с помощью модели Кельвина – Фойгта:

$$\hat{\mu} = \mu_0 \left[ 1 + \tau_\sigma \frac{d}{dt} \right], \quad (19)$$

где  $\mu_0$  – релаксированный модуль сдвига;

$\tau_\sigma$  – время ретардации при сдвиге.

При этом объемный модуль упругости (модуль всестороннего сжатия)  $K$  принимается постоянной величиной, равной релаксированному значению модуля всестороннего сжатия  $K_0$ .

Подставляя образ (19) по Лапласу в формулы для скоростей волн (13) и пользуясь известным соотношением между параметрами Ламе и модулем всестороннего сжатия [11]:

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu, \quad (20)$$

и принципом соответствия Вольтерры [12], можно получить численное решение задачи.

## Результаты

Графики зависимости функции безразмерных радиальных перемещений при фиксированных значениях безразмерного времени приведены на рис. 2 а) – г) и построены при определенном наборе значений безразмерных комплексов:  $\frac{\tau_\sigma}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = 1$ ,  $\frac{q}{\mu_0 \tau_\sigma} = 1$  и  $\frac{K}{\mu_0} = \frac{13}{6}$ .

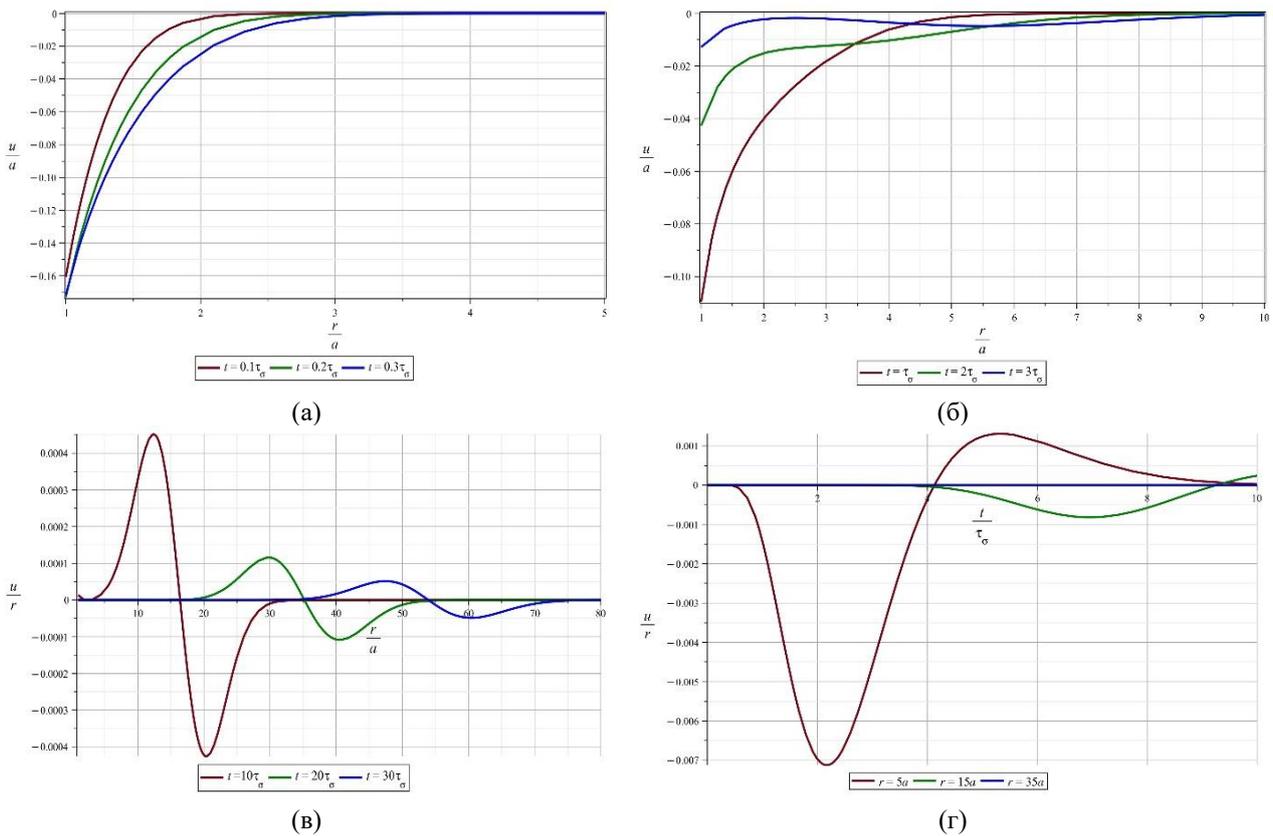
Третий безразмерный комплекс выбран таким, чтобы нерелаксированное значение коэффициента Пуассона соответствовало его значению для стали, т.е. 0,3.

Из полученных результатов зависимости радиальных перемещений от радиус-вектора при различном фиксированном времени  $t$  следует сложный вид затухания толстостенной вязкоупругой сферической оболочки при импульсном воздействии с присутствием высокочастотных колебаний и инерционных эффектов.

На рисунке 2(а) при  $t$  от 0,1 до 0,3  $\tau_\sigma$  наблюдается монотонное уменьшение модуля перемещений по мере увеличения радиуса. На меньших радиусах радиальные перемещения сильнее выражены, что указывает на значительное влияние вблизи источника импульсного воздействия. С увеличением радиуса  $r$  перемещения стабилизируются, что указывает на то, что волновой процесс не прошел вглубь конструкции.

На рисунке 2(б) можно наблюдать аналогичное поведение перемещений, однако диапазон значений радиуса больше, что демонстрирует, как фронт продольной волны перемещений продолжает проходить вглубь на больших расстояниях. График показывает влияние вязкоупругих свойств материала толстостенной сферической оболочки: затухание волн происходит неравномерно и зависит от времени.

На рисунке 2(в) виден более сложный колебательный процесс перемещений на больших расстояниях от источника импульсного воздействия. В зависимости от времени перемещения могут изменять знак, что указывает на волновые эффекты и колебательные процессы внутри оболочки.



**Рис. 2. Зависимость обезразмеренных радиальных перемещений от обезразмеренной радиальной переменной при различном фиксированном обезразмеренном времени  $t/\tau_\sigma$  (а, б, в). Зависимость обезразмеренных радиальных перемещений от обезразмеренного времени при различном фиксированном значении обезразмеренной радиальной переменной  $r/a$  (г)**

**Fig. 2. Dependence of the unmeasured radial displacements on the unmeasured radial variable at different fixed unmeasured time  $t/\tau_\sigma$  (a, б, в). Dependence of the unmeasured radial displacements on the unmeasured time at different fixed value of the unmeasured radial variable  $r/a$  (г)**

На рисунке 2(г) для малого радиуса ( $r = 5a$ ) наблюдается сильное начальное отрицательное перемещение (сжатие), которое достигает максимума по амплитуде примерно на интервале  $t \approx 2\tau_\sigma$ . После этого перемещения начинают осциллировать с затухающей амплитудой. Максимальная амплитуда колебаний постепенно уменьшается. Для радиуса  $r = 15a$  колебания также присутствуют, но они начинаются позже по времени и имеют меньшую амплитуду по сравнению с  $r = 5a$ . На большем расстоянии от центра ( $r = 35a$ ) колебания практически отсутствуют: перемещения незначительны, и график показывает медленное затухание малых амплитуд. В этой области волновой процесс уже существенно ослаблен, что указывает на затухание колебаний на больших расстояниях от источника воздействия.

### Заключение

Исследованы особенности поведения толстостенной вязкоупругой сферической оболочки при импульсном воздействии. Вязкоупругие материалы демонстрируют сложное поведение, зависящее от времени и частоты приложения нагрузки, что требует использования соответствующих моделей поведения. Полученные результаты демонстрируют, что использование модели Кельвина – Фойгта для описания вязкоупругих свойств позволяет адекватно моделировать волновые процессы в материалах, обладающих временем релаксации и зависимостью свойств от частоты нагрузки. Численно-аналитическое решение, полученное с использованием преобразования Лапласа, подтверждает необходимость учета инерционных эффектов и высокочастотных колебаний для правильного описания поведения таких систем.

Таким образом, выполненное исследование закладывает основу для последующих теоретических и прикладных разработок (на базе численного моделирования) в области расчета толстостенных вязкоупругих оболочек, что имеет большое значение для повышения надежности и механической безопасности конструкций.

### Благодарности

Работа (Саияна С.Г.) выполнена за счет гранта РНФ № 24-49-02002.

### ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

С.Г. Саиян – научное руководство, концепция исследования, методология исследования, анализ и интерпретация результатов исследования, написание текста статьи, научное редактирование текста, итоговые выводы; К.А. Модестов – разработка математической модели, концепция исследования; О.А. Брыгар – проведение расчетных исследований, обработка результатов моделирования, написание текста статьи, подготовка и редактирование текста. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

S.G. Saiyan – scientific guidance, research concept, research methodology, analysis and interpretation of research results, writing the text of the article, scientific editing of the text, final conclusions; K.A. Modestov – development of a mathematical model, research concept; O.A. Brygar – conducting computational research, processing modeling results, writing the text of the article, preparation and editing of the text. All the authors have read and approved the final version of the manuscript.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | CONFLICT OF INTEREST

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.  
The authors declare no conflict of interest.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Saiyan S.G., Paushkin A.G. Development and verification of the two-layer thick-walled spherical shell's finite element model under temperature and force exposure // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Art. 032058. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/3/032058>
- Андреев В.И., Булушев С.В. Оптимизация неоднородной толстостенной сферической оболочки, находящейся в температурном поле // Вестник МГСУ. 2012. № 12. С. 40–46.
- Андреанов И.К., Лин Т. Предельное деформирование толстостенной сферической оболочки с учетом сжимаемости материала и его конечно-элементная верификация // Производственные технологии будущего: от создания к внедрению: материалы VI Международной научно-практической конференции молодых ученых, Комсомольск-на-Амуре, 05–11 декабря 2022 года: в 2 ч. Ч. 2. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2023. С. 3–6.
- Артемов М.А. и др. Задача о толстостенной сферической оболочке // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2021. Т. 21, № 1. С. 22–31.
- Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н. Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вестник СамГУ. 2005. № 6. С. 70–88
- Almuratov Sh. Radial vibrations of a viscoelastic spherical shell // Universum: technical sciences. 2022. № 3–7(96). С. 4–8.
- Rossikhin Y., Shitikova M. Analysis of two colliding fractionally damped spherical shells in modelling blunt human head impacts. *Open Physics*. 2013. № 11(6). P. 760–778. DOI: <https://doi.org/10.2478/s11534-013-0194-4>
- Liu T., Chen Yu., Hutchinson J., Jin L. Buckling of viscoelastic spherical shells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2022. № 169. Art. 105084. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105084>
- Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Elsevier, 2012. 425 с.
- Лепихин П.П. Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек при импульсном нагружении по поверхности: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Харьков, 1979. 24 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 248 с.
- Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.

### REFERENCES

- Saiyan S.G., Paushkin A.G. Development and verification of the two-layer thick-walled spherical shell's

- finite element model under temperature and force exposure. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, art. 032058. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/3/032058>
2. Andreev V.I., Bulushev S.V. Optimization of an inhomogeneous thick-walled spherical shell located in a temperature field. *Vestnik MGSU*, 2012, no. 12, pp. 40–46 (In Russ.).
  3. Andrianov I.K., Lin T. Limiting deformation of a thick-walled spherical shell taking into account the compressibility of the material and its finite element verification. *Production technologies of the future: from creation to implementation: materials of the VI international scientific and practical conference of young scientists. Komsomolsk-on-Amur, December 05–11, 2022*. In 2 parts. Part 2. Komsomolsk-on-Amur, Komsomolsk-on-Amur State University, 2023, pp. 3–6. (In Russ.).
  4. Artyomov M.A. et al. The problem of a thick-walled spherical shell. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 22–31. (In Russ.).
  5. Lychev S.A., Sayfutdinov Yu.N. Equations of motion of a three-layer viscoelastic spherical shell. *Bulletin of the Samara State University*, 2005, no. 6, pp. 70–88. (In Russ.).
  6. Almuratov Sh. Radial vibrations of a viscoelastic spherical shell. *Universum: technical sciences*, 2022, no. 3–7(96), pp. 4–8.
  7. Rossikhin Y., Shitikova M. Analysis of two colliding fractionally damped spherical shells in modelling blunt human head impacts. *Open Physics*, 2013, no. 11(6), pp. 760–778. DOI: <https://doi.org/10.2478/s11534-013-0194-4>
  8. Liu T., Chen Yu., Hutchinson J., Jin L. Buckling of viscoelastic spherical shells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2022, no. 169, art. 105084. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105084>
  9. Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Elsevier, 2012. 425 p.
  10. Lepikhin P.P. Study of stress-strain state of multilayer thick-walled cylindrical and spherical shells under pulse loading on the surface. Abstract of PhD (Eng.) Thesis. Kharkov, 1979. 24 p. (In Russ.).
  11. Landau L.D., Lifshits E.M. Theory of elasticity. Moscow, Nauka, 1965. 248 p. (In Russ.).
  12. Rabotnov Yu.N. Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow, Nauka, 1977. 384 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Саиян Сергей Гургенович** – научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов имени А.Б. Золотова, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; младший научный сотрудник Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН; преподаватель кафедры информатики и прикладной математики, инженер-расчетчик АО НИЦ «СтаДиО» (Москва, Российская Федерация)

✉ Berformert@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0694-4865>

**Sergey G. Saiyan** – Researcher at the Scientific and Educational Center for Computer Modeling of Unique Buildings, Structures and Complexes named after A.B. Zolotov, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University); Junior Researcher at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; Lecturer at the Department of Computer Science and Applied Mathematics, Calculation Engineer at the SRC StaDiO (Moscow, Russian Federation)

**Модестов Константин Анатольевич** – старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики, Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (Москва, Российская Федерация); младший научный сотрудник Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук имени заслуженного деятеля науки Российской Федерации профессора Россихина Ю.А., Воронежский государственный технический университет (Воронеж, Российская Федерация)

✉ ModestovKA@mgsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>

**Konstantin A. Modestov** – Senior Lecturer at the Department of General and Applied Physics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (Moscow, Russian Federation); Junior Researcher at the International Scientific Center for Fundamental Research in the Field of Natural and Building Sciences named after Honored Scientist of the Russian Federation, Professor Yu.A. Rossikhin, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russian Federation)

**Брыгар Олег Андреевич** – старший лаборант кафедры общей и прикладной физики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (Москва, Российская Федерация)

✉ brygaro@yandex.ru

**Oleg A. Brygar** – Senior Laboratory Assistant at the Department of General and Applied Physics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (Moscow, Russian Federation)

Статья поступила в редакцию / Received: 30.09.2024.

Доработана после рецензирования / Revised: 05.11.2024.

Принята к публикации / Accepted: 09.12.2024.