

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 69.04

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2024-4/96-104>

## Исследование контактных напряжений в узле опирания стальной балки с учётом величины заглабления в бетонную стену

Михаил Владимирович Долгачёв, Александр Николаевич Попов<sup>✉</sup>

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Российская Федерация

✉ [sanyapov@mail.ru](mailto:sanyapov@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается опирание двутавровой балки на бетонную стену. В модели производится учёт одностороннего взаимодействия балки и бетонной стены, который ведёт к перераспределению усилий взаимодействия и, соответственно, максимальных напряжений, возникающих в бетоне в области контакта. Рассчитываются варианты с разной величиной заглабления балки в стену. Показаны распределения усилий взаимодействия в области контакта стены с балкой при одностороннем и двухстороннем взаимодействии. По полученным результатам можно сделать вывод об уменьшении максимальных сжимающих напряжений в бетоне в области контакта в нелинейной постановке при определённой величине заглабления балки.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, балка, линейная задача дополненности, односторонний контакт, контакт с трением

**Для цитирования:** Долгачёв М.В., Попов А.Н. Исследование контактных напряжений в узле опирания стальной балки с учётом величины заглабления в бетонную стену // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4(61). С. 96–104.

## CONSTRUCTION MECHANICS

Original article

## Investigation of contact stresses in the support joint of a steel beam considering the depth of embedment into a concrete wall

Mikhail V. Dolgachev, Alexander N. Popov<sup>✉</sup>

Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation

✉ [sanyapov@mail](mailto:sanyapov@mail)

**Abstract.** This paper examines the support of an I-beam on a concrete wall. The model takes into account the unilateral contact between the beam and the concrete wall, which leads to a redistribution of interaction forces and, consequently, the maximum stresses that occur in the concrete in the contact area. Different scenarios with varying beam embedment depths into the wall are calculated. The distributions of interaction forces in the contact area between the wall and the beam under one-sided and two-sided interaction are presented. Based on the obtained results, it can be concluded that the maximum compressive stresses in the concrete in the contact area are reduced in the nonlinear formulation with a certain beam embedment depth.

**Keywords:** finite element method, beam, linear complementarity problem, unilateral contact, frictional contact

**For citation:** Dolgachev M.V., Popov A.N. Investigation of contact stresses in the support joint of a steel beam considering the depth of embedment into a concrete wall. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2024, no. 4(61), pp. 96–104. (In Russ.).

## Введение

Контактное взаимодействие элементов строительных конструкций является одной из ключевых задач механики деформируемого твёрдого тела. В современных условиях проектирования и строительства особое внимание уделяется моделированию контактных усилий, возникающих при взаимодействии различных конструктивных элементов, таких как балки, стены, колонны и плиты. Правильное определение этих усилий важно для обеспечения надёжности и долговечности конструкций. Исследование контактных взаимодействий строительных конструкций, особенно в контексте взаимодействия стальных и бетонных элементов, активно развивается в последние десятилетия. Ключевыми направлениями исследований в этой области являются анализ контактных напряжений, моделирование одностороннего контакта, а также изучение влияния различных факторов на контактные усилия.

Основой для проектирования является СП 266.1325800.2016 «Конструкции сталежелезобетонные. Правила проектирования» и «Руководство по проектированию сталежелезобетонных конструкций» от Ассоциации развития стального строительства. Чаще всего в нормативных документах рассматриваются варианты расчёта несъёмных опалубок, жёсткой арматуры и устройства железобетонных перекрытий на стальных балках. В индивидуальном строительстве распространён вариант устройства перекрытия из стальных балок с описанием на стены.

Моделирование узлов опирания балок и их одностороннего взаимодействия – распространённая задача. В статье [1] рассматривается методика расчёта стальных двутавровых балок с учётом эффекта частичного защемления опорных узлов, что позволяет снизить материалоемкость конструкций. Моделирование выполнено на основе численного анализа трёхмерных конечно-элементных моделей в комплексе SCAD Office, а предложенный подход помогает перераспределять изгибающие моменты и оптимизировать сечения балок, повышая экономичность и надёжность балочных систем.

В работе [2] авторы рассматривают динамический односторонний контакт между двумя балками, моделируемый с использованием условий Синьорини. В предложенном авторами алгоритме задача аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены результаты моделирования для случая периодического воздействия на одну из балок и исследованы характеристики передачи вибраций через контактный стык.

В [3] авторы предлагают нелинейный динамический решатель для моделирования одностороннего взаимодействия жёсткого колеса с гибкой балкой. Автор расширяет схему дискретизации Эйлера, добавляя линейный комплементарный подход для явной интеграции по времени, что позволяет учесть трение и возможный разрыв контакта между колесом и балкой.

В статье [4] рассматривается задача максимизации жёсткости (измеряемой через податливость) упругой структуры с односторонним, без трения контактом в рамках топологической оптимизации. Односторонний контакт вводится в непрерывную формулировку задачи упругости в регуляризованной форме с асимметричным законом поведения, связывающим нормальную компоненту вектора напряжений с нормальным смещением. Предложен алгоритм оптимизации, ранее разработанный для линейной упругости, который адаптирован для нелинейной задачи с односторонним контактом. Приведены численные примеры для задач двумерной упругости.

В [5] авторы рассматривают задачу оптимального предварительного напряжения для стабилизации упругих конструкций с контактными интерфейсами, подверженными трению, при статических нагрузках. Модель линейной упругой конструкции с односторонним контактом формулируется как несимметричное вариационное неравенство. Целью является закрытие контактных стыков и минимизация сдвигов, вызванных трением, при минимальных усилиях. Для решения этой нелинейной и негладкой задачи используются методы анализа негладких функций, а численная реализация интегрируется в существующее ПО методом статической конденсации.

В исследовании [6] представлены алгоритмы для моделирования контакта с трением между грунтами и жёсткими или деформируемыми конструкциями в рамках метода гидродинамики частиц. Предложенные методы улучшают точность и эффективность контактного моделирования в геотехнических задачах, таких как забивка свай и движение подпорных стен, что подтверждено численными тестами.

Настоящее исследование посвящено анализу контактных усилий, возникающих в результате взаимодействия стальной балки с бетонной стеной. В рассматриваемой задаче балка свободно опирается на стену, что приводит к возникновению одностороннего контакта, при котором возникают только сжимающие контактные напряжения. Односторонний контакт характерен тем, что контактные силы могут возникать только при сближении контактирующих поверхностей, что делает эту задачу достаточно сложной для моделирования и анализа.

**Предмет исследования:** контактные усилия и напряжения, возникающие при одностороннем контакте стальной балки с бетонной стеной.

**Объект исследования:** стальная балка, свободно опёртая на бетонную стену, рассматриваемая в условиях одностороннего контакта.

С учётом симметрии задачи для моделирования было принято решение рассматривать только половину пролёта балки, что снижает вычислительную сложность, не теряя при этом в точности результатов. В ходе исследования проводится анализ контактных усилий и максимальных напряжений в бетоне, возникающих в области контакта. Особое внимание уделяется определению максимальных контактных напряжений в сравнении одностороннего и двухстороннего контактов, что важно для проектирования и оптимизации конструкции.

**Целью** данного исследования является изучение влияния жёсткости стальной балки и величины её заглубления в бетонную стену на контактные усилия и напряжения, возникающие при одностороннем контакте.

Из поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

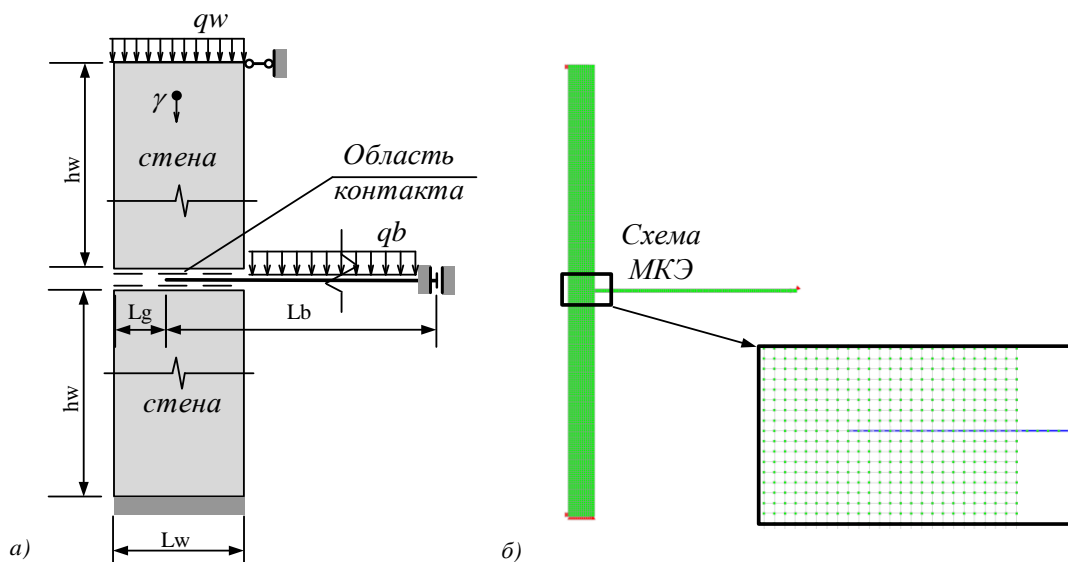
1. Разработать математическую модель для анализа контактных усилий в стальной балке, свободно опёртой на бетонную стену, и программно реализовать её.
2. Определить влияние величины заглубления балки в стену на распределение контактных усилий и напряжений в бетоне.
3. Проанализировать результаты численного моделирования для линейной и нелинейной постановок задачи.
4. Сформулировать рекомендации для проектирования конструкций с учётом полученных результатов.

## Методы и результаты

Предложенная задача одностороннего контакта ставится в виде линейной задачи дополнителности (ЛЗД). Для решения поставленной задачи используется шаговый метод Лемке. За основу взят алгоритм, разработанный и представленный в [7]. Использование данного подхода к решению контактных задач позволяет точно выполнять условия взаимонепenetрации контактирующих тел за конечное число шагов, без необходимости задавать параметры итерационного процесса или определять жёсткость контактных связей.

Для решения задачи в виде ЛЗД требуется дискретизация области контакта. В качестве метода решения линейной части задачи выбран метод конечных элементов (МКЭ). Для реализации алгоритма решения задачи одностороннего контакта с трением написана программа на языке Python. В программе реализован МКЭ, простой генератор сетки конечных элементов (КЭ), метод Лемке решения ЛЗД и методы формирования таблиц метода Лемке. Густота сетки определена исходя из сходимости результатов решения задачи (отклонение результатов при сгущении сетки КЭ в два раза составило менее 5%). Стена моделируется с использованием четырёхузлового элемента плоской задачи теории упругости с двумя степенями свободы в узле, балка – с помощью рамного элемента плоской задачи с тремя степенями свободы в узле.

Расчётная схема представлена на рис. 1а, на рис. 1б показана расчётная схема МКЭ. Рассматривается монолитная бетонная стена с зоной контакта в месте стыка со стальной балкой. Моделируется односторонний контакт балки с нижней и верхней частью стены. Также учитывается одностороннее взаимодействие с учётом трения для верхней и нижней части стены в области контакта длиной  $L_g = 0.1\text{ м}$  для учёта возможности трещинообразования. Учитываемая область для верхней и нижней части стены  $h_w = 3\text{ м}$  и  $L_w = 0.3\text{ м}$ . Половина длины балки  $L_b = L_p - L_g$ , где  $L_p = 3\text{ м}$  – расстояние от внешней грани стены до середины пролёта балки.



**Рис. 1. Расчётная схема стенки с балкой**

**Fig. 1. Design scheme of the wall with beam**

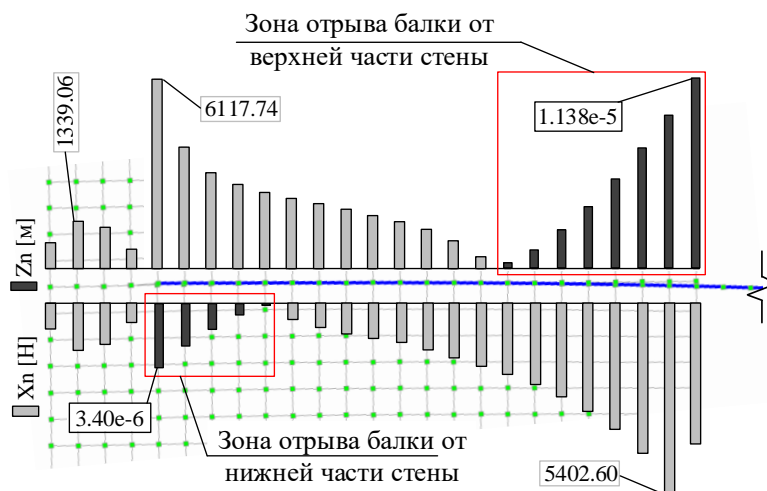
Для нижнего ряда узлов стены запрещены вертикальные и горизонтальные перемещения; для верхней части стены (верхнего ряда узлов) запрещены горизонтальные перемещения; из условий симметрии для правого узла балки запрещены горизонтальное перемещение и поворот (предполагается, что справа балка также опирается на стену). Рассматривается задача плоской деформации, когда перемещения из плоскости задачи равны нулю.

Модуль упругости бетона равен  $E_c = 2e9\text{ Па}$ ; коэффициент Пуассона –  $\nu_c = 0,15$ ; учитываемый собственный вес бетона –  $\gamma = 24e3\text{ Н / м}^3$ , коэффициент трения принят равным  $f = 0,4$ ; учитываемая толщина стены –  $1\text{ м}$ . На стену сверху действует равномерно распределённая нагрузка от верхней части конструкции  $q_w = 4e4\text{ Н / м}$ . На балку действует равномерно распределённая нагрузка  $q_b = 2e3\text{ Н / м}$ . В качестве балки выбран прокатный стальной двутавр № 20. Модуль упругости балки  $E_b = 2e11\text{ Па}$ ; момент инерции  $I_b = 1.84e-5\text{ м}^4$ ; площадь  $A_b = 2.68e-3\text{ м}^2$ .

Решением ЛЗД являются усилия взаимодействия  $x_n$  и взаимные перемещения  $z_n$  в зоне контакта. На рис. 2 представлены графики  $x_n$  и  $z_n$  для  $L_g = 0.05\text{ м}$  в нелинейной постановке задачи с односторонними связями. Синим цветом выделена балка. Взаимодействия балки с верхней и нижней частями стены показаны сверху и снизу от зоны контакта соответственно; слева от балки односторонне взаимодействуют верхняя и нижняя части стены. Графики усилий и перемещений наложены на деформируемую схему в увеличенном в 200 раз масштабе. Положительными усилиями взаимодействия по нормали  $x_n > 0$  считаются усилия, сжимающие контактирующие узлы в рассматриваемой зоне контакта.

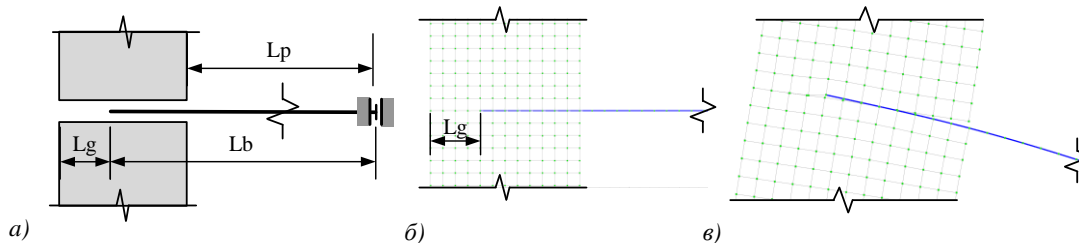
Рассмотрим в качестве переменного параметра расстояние зазора от балки до внешней части стены  $L_g$  и длину балки  $L_b$ . В таком случае длина половины пролёта балки  $L_p$  остаётся

неизменной (рис. 3а). На рис. 3б показана КЭ схема до деформаций; на рис. 3в – после деформаций, масштаб деформаций увеличен в 400 раз (M400:1).



**Рис. 2. Зона контакта. Усилия взаимодействия  $x_n$  и взаимные перемещения  $z_n$**

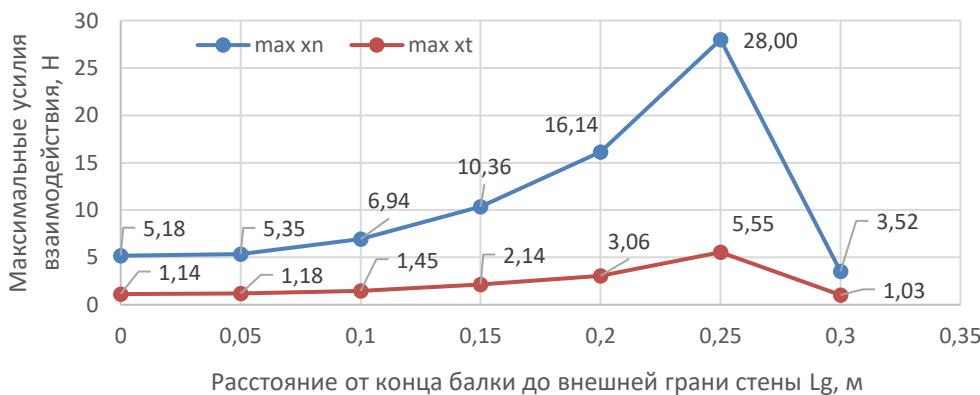
Fig. 2. Contact zone. Interaction forces  $x_n$  and mutual displacements  $z_n$



**Рис. 3. Узел. Переменные параметры**

Fig. 3. Unit. Variable parameters

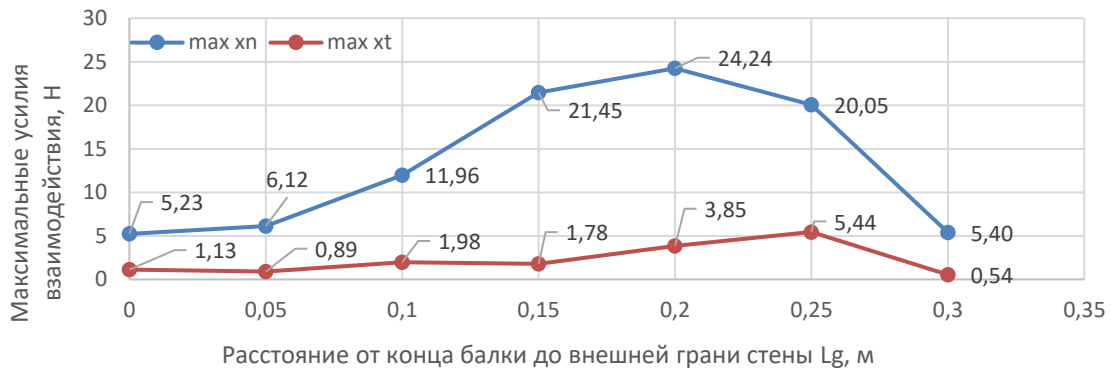
Таким образом, при изменении параметров  $L_g$  и  $L_b$  и решении контактной задачи получаем зависимость максимальных (по модулю) усилий взаимодействия в зоне контакта от расстояния  $L_g$  от балки до внешней грани стены. Результаты для линейной постановки задачи (двухсторонние связи) для максимальных усилий взаимодействия по нормали  $x_n$  и по касательной  $x_t$  к поверхности контакта приведены на рис. 4.



**Рис. 4. Усилия взаимодействия. Линейная постановка**

Fig. 4. Interaction forces. Linear formulation

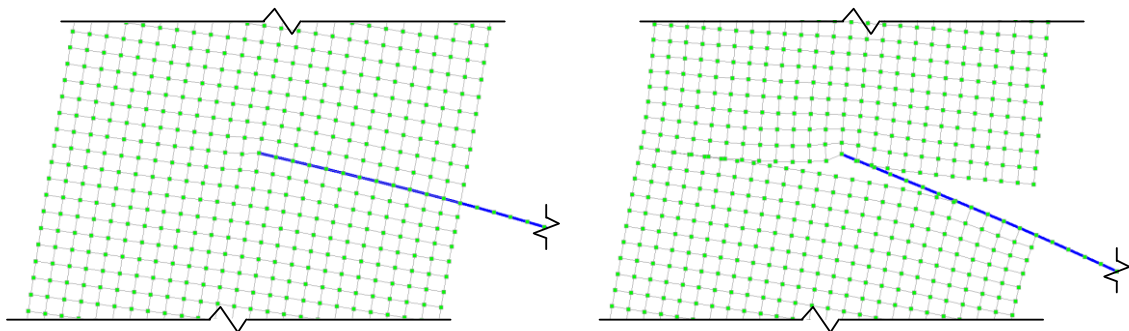
Аналогично получаются результаты для нелинейной постановки задачи (односторонние связи с трением) для максимальных  $x_n$  и  $x_t$  (рис. 5).



**Рис. 5. Усилия взаимодействия. Нелинейная постановка**

Fig. 5. Interaction forces. Nonlinear formulation

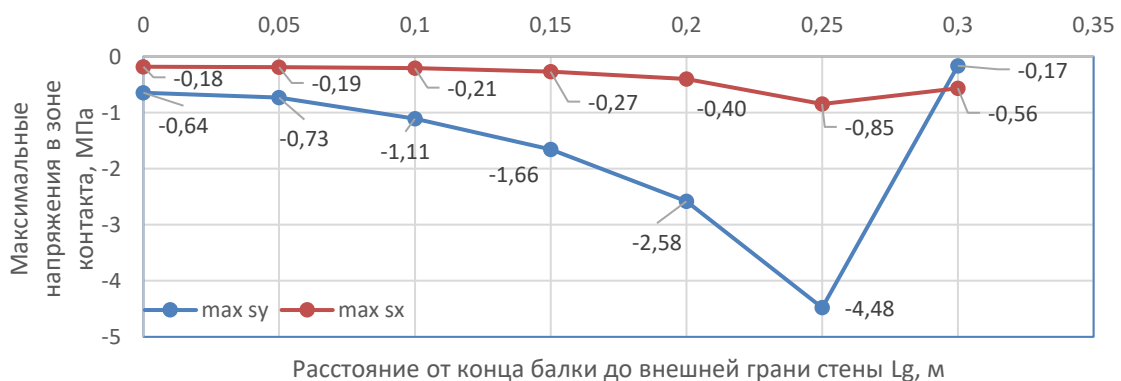
Наглядно показывает отличия в линейной и нелинейной постановках деформируемая схема узла балки и стены с увеличенным масштабом деформаций в 400 раз (рис. 6).



**Рис. 6. Деформируемые схемы для линейной и нелинейной постановок**

Fig. 6. Deformed schemes for linear and nonlinear formulation

Из полученных усилий взаимодействия рассчитываются напряжения в области контакта. На рис. 7 представлена зависимость максимальных напряжений по вертикали  $s_y$  ( $\sigma_y$ ) и по горизонтали  $s_x$  ( $\sigma_x$ ) от расстояния  $L_g$ , изменяющегося от 0 до 0,3 м (толщина стены), в линейной постановке (двухсторонние связи). На рис. 8 показан аналогичный график для нелинейной постановки (односторонние связи).



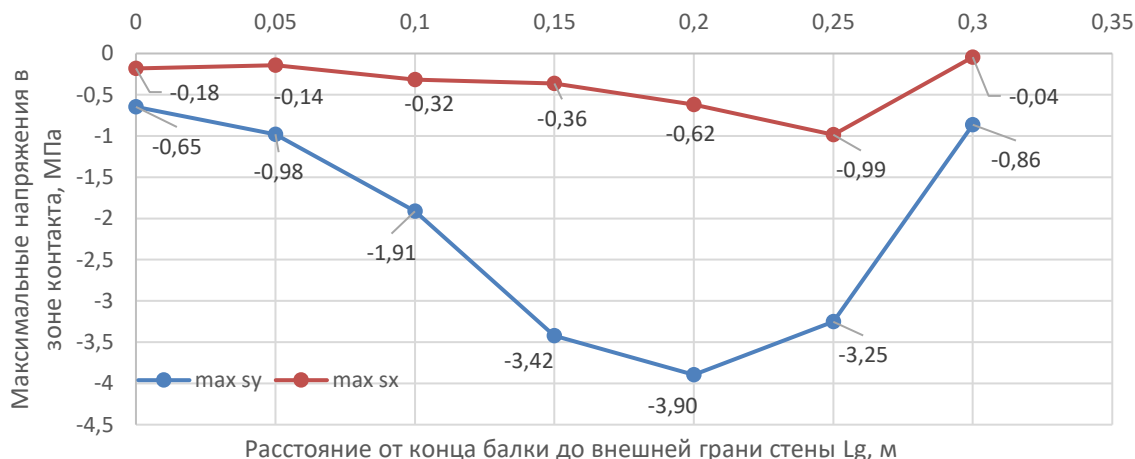
**Рис. 7. Напряжения. Линейная постановка**

Fig. 7. Stresses. Linear formulation

Плавное изменение максимальных напряжений в нелинейной постановке говорит о получении модели, частично схожей с моделированием заделки конечной жёсткости. Здесь можно выделить два крайних случая:

1.  $L_g = 0$ , балка заглублена в стену на всю толщину до внешней левой грани. Моделируется упрощённый вариант жёсткой заделки. Данный способ моделирования жёсткого опирания является приблизительным, но его правдоподобие подтверждается практическим совпадением максимальных напряжений для линейной и нелинейных постановок (рис. 7 и рис. 8).

2.  $L_g=L_w=0,3$ , балка не заглублена в стену. Моделируется шарнирное опирание на стену.



**Рис. 8. Напряжения. Нелинейная постановка**

**Fig. 8. Stresses. Nonlinear formulation**

### Обсуждение результатов

Произведена серия расчётов двутавровой балки, односторонне опирающейся на бетонную стену. В задаче принят ряд упрощений:

1. Балка моделируется стержнем, и в узле примыкания балки к стене не учитывается толщина её сечения.
2. Материал балки и стены работают линейно по закону Гука.
3. Возможность образования трещин в бетоне учитывается только в области рассматриваемого контакта балки со стеной.

Из полученных зависимостей на рис. 7 и рис. 8 можно отметить, что максимальные напряжения возникают в линейной постановке задачи при уменьшении заглубления балки в стену. Здесь важно отметить, что напряжения в нелинейной постановке в бетоне при величине заглубления  $L_g=0,15$  м (на половину стены) оказались выше на 50%, 1,65 МПа против 3,42 МПа (рис. 7 и рис. 8). Большая разница по напряжениям показывает, что при определённой величине заглубления балки в стену напряжения в линейной и нелинейной постановках могут существенно различаться, и на ответственных объектах строительства учёт одностороннего контакта необходим.

### Заключение

В результате выполнения поставленных задач были получены следующие ключевые результаты:

1. Разработана математическая модель для анализа контактных усилий в стальной балке, свободно опертой на бетонную стену. За основу взята постановка задачи в виде ЛЗД. Задача решается с помощью метода Лемке. Формирование данных с помощью МКЭ и решение задачи выводом результатов расчёта программно реализованы на языке Python.
2. Получены графики зависимостей максимальных усилий взаимодействия и напряжений в зоне контакта в зависимости от величины заглубления балки в линейной и нелинейной постановках.

3. Проанализированы результаты численного моделирования. В зависимости от величины заглупления балки в стену линейная и нелинейная модели имеют различные пики максимальных напряжений в области контакта.

Для случаев моделирования жёсткой заделки с полным заглуплением балки в стену и шарнирным опиранием достаточно использовать линейную модель расчёта. Для промежуточных случаев напряжения в нелинейной постановке могут оказаться больше, вплоть до 50%, из чего следует необходимость использования более сложных моделей, учитывающих одностороннее взаимодействие в месте опирания балки на стену. Следует обратить внимание, что опирание балки в точке на внутренней грани стены невозможно, т.к. балка обязательно заводится на минимально необходимую величину в стену либо крепится к закладной детали.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о необходимости учёта одностороннего взаимодействия в области контакта балки со стеной, за исключением ситуации, когда балка опирается на всю толщину сечения стены.

#### ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

М.В. Долгачев – разработка темы исследования, поиск актуальной литературы и разработка модели взаимодействия; постановка задачи. А.Н. Попов – написание программы для расчётов, реализация алгоритмов, оформление и тестирование.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

M.V. Dolgachev – research topic development, literature review, and interaction model development; problem formulation. A.N. Popov – programming for calculations, algorithm implementation, design, and testing.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | CONFLICT OF INTEREST

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflict of interest.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Кузнецов Д.Н., Беляева С.Ю., Сазыкин В.Г. Метод расчета стальных двутавровых балок с учетом частичного защемления в опорном узле // *Транспортные сооружения*. 2020. Т. 7, № 3. DOI: <https://doi.org/10.15862/09SATS320>
2. Kuttler K.L., Park A., Shillor M., Zhang W. Unilateral dynamic contact of two beams // *Mathematical and Computer Modelling*. 2001. Vol. 34, № 3–4. P. 365–384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(01\)00068-1](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(01)00068-1)
3. Sethi M., Banerjee A., Manna B. Unilateral frictional contact between a rigid wheel traversing on a flexible beam: An analytical investigation // *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 120. P. 612–635. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.04.019>
4. Desmorat B. Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, № 3–4. P. 1132–1144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsol-str.2006.06.010>
5. Stavroulakis G. Optimal prestress of structures with frictional unilateral contact interfaces // *Archive of Applied Mechanics*. 1995. Vol. 66, № 1–2. P. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00786690>
6. Wang J., Chan D. Frictional contact algorithms in SPH for the simulation of soil-structure interaction // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2014. Vol. 38, № 7. P. 747–770. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2233>
7. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis // *Magazine of Civil Engineering*. 2020. Vol. 100, № 8. DOI: <https://doi.org/10.18720/MCE.100.1>

#### REFERENCES

1. Kuznetsov D.N., Belyaeva S.Yu., Sazykin V.G. Steel I-joists calculating method with the heel joint partial restraint. *Russian Journal of Transport Engineering*, 2020, vol. 7, no. 3. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15862/09SATS320>
2. Kuttler K.L., Park A., Shillor M., Zhang W. Unilateral dynamic contact of two beams. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, vol. 34, no. 3–4, pp. 365–384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(01\)00068-1](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(01)00068-1)



3. Sethi M., Banerjee A., Manna B. Unilateral frictional contact between a rigid wheel traversing on a flexible beam: An analytical investigation. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, vol. 120. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.04.019>
4. Desmorat B. Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, no. 3–4, pp. 1132–1144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsol-str.2006.06.010>
5. Stavroulakis G. Optimal prestress of structures with frictional unilateral contact interfaces. *Archive of Applied Mechanics*, 1995, vol. 66, no. 1–2, pp. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00786690>
6. Wang J., Chan D. Frictional contact algorithms in SPH for the simulation of soil-structure interaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, vol. 38, no. 7, pp. 747–770. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2233>
7. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, vol. 100, no. 8. DOI: <https://doi.org/10.18720/MCE.100.1>

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Долгачев Михаил Владимирович** – кандидат технических наук, доцент Высшей школы промышленного и гражданского строительства, Тихоокеанский государственный университет (Хабаровск, Российская Федерация)

✉ bearsgod@pnu.edu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1520-800X>

**Mikhail V. Dolgachev**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of Higher School of Industrial and Civil Engineering, Pacific National University (Khabarovsk, Russian Federation)

**Попов Александр Николаевич** – старший преподаватель Высшей школы промышленного и гражданского строительства, Тихоокеанский государственный университет (Хабаровск, Российская Федерация),

✉ pan@pnu.edu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6762-5476>

**Aleksandr N. Popov**, Senior Lecturer of Higher School of Industrial and Civil Engineering, Pacific National University (Khabarovsk, Russian Federation)

Статья поступила в редакцию / Received: 19.09.2024.

Доработана после рецензирования / Revised: 05.12.2024.

Принята к публикации / Accepted: 09.12.2024.