СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 539.3.519.3 :624.04
https://doi.org/10.24866/2227-6858/2024-4/90-95

Формы консоли на основе вариационного принципа Кастильяно

Виктория Анатольевна Зинькова✉

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова,
Белгород, Российская Федерация
✉ vikzinkova@mail.ru

Аннотация. Целью настоящей работы является исследование форм консолей на основе вариационного принципа Кастильяно при использовании двойственности постановки задач на условный экстремум с интегральными связями и сопоставление их с традиционными формами. Достаточным условием достижения глобального экстремума функционала цели является введение энергетического начала в процедуру решения изопериметрической задачи. Целью задачи определения формы является распределение материала таким образом, чтобы был достигнут глобальный минимум потенциальной энергии деформации при переменных напряжениях, параметрах формы и введённых ограничениях. В рассматриваемом частном случае без нарушения энергетического начала и изопериметрии вводится ограничение на перемещения. Установлено, что на консоли, нагруженной на краю сосредоточенной силой, выгоднее менять ширину сечения (экономия материала 33%), чем его высоту (экономия 19%).
Ключевые слова: нагруженная силой консоль, переменные размеры сечения, ограничения по перемещениям, вариационный принцип Кастильяно, двойственная постановка задачи
Для цитирования: Зинькова В.А. Формы консоли на основе вариационного принципа Кастильяно // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4(61). С. 90–95.

CONSTRUCTION MECHANICS

Original article

Console shapes based on the Castigliano variational principle

Victoria A. Zinkova✉

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russian Federation
✉ vikzinkova@mail.ru

Abstract. The purpose of this work is to study the forms of consoles based on the Castigliano variational principle using the duality of setting problems on a conditional extremum with integral connections and comparison them with traditional forms. A sufficient condition for achieving the global extremum of the functional of the goal is the introduction of the energy principle into the procedure for solving the isoperimetric problem. The purpose of the shape determination task is to distribute the material in such a way that a global minimum of potential deformation energy is achieved under variable stresses, shape parameters and imposed constraints. In the particular case under consideration, restriction on movement are introduced without violation of the energy principle and isoperimetrically. It was found that on a console loaded at the edge with concentrated force, it is more profitable to change the width of the section (saving 33% of the material) than its height (saving 19%).
Keywords: a force-loaded console, variable cross-section dimensions, restrictions on movement, the Castigliano variational principle, a dual formulation of the problem
For citation: Zinkova V.A. Console shapes based on the Castigliano variational principle. *FEFU*: *School of Engineering Bulletin*, 2024, no. 4(61), pp. 90–95. (In Russ.).

Введение

Единая методологическая основа анализа и синтеза объектов строительной механики – вариационные принципы механики деформируемого твёрдого тела, которым присуще энергетическое начало. Для анализа систем используются в первую очередь принципы Лагранжа и Кастильяно. Вариационные принципы синтеза сформулированы в работе [1] как обобщение упомянутых принципов в случае расширения функционального пространства за счёт полей функций формы и (или) модулей упругости материала. Важным признаком этих принципов является достижение абсолютного (глобального) экстремума функционала цели.

Исследования в этой области приходят на смену бытовавшим ранее весовой и другим формам оптимизации конструкции. Примеры многочисленных работ в этом направлении можно встретить в обзоре [2]. Постановка задачи с сугубо экономическим критерием (минимум объёма, массы, стоимости и т.п.) при сопутствующем выхолащивании физического содержания выходит за рамки механики деформируемого твёрдого тела. Как следствие, не гарантируется достижение глобального экстремума функционала цели ввиду допустимого отсутствия у него свойства выпуклости.

Критерии оптимальности с позиций сугубо экономических носят субъективный характер. С позиций вариационных принципов синтеза критерии не представляются априорными, а обуславливаются уравнениями структурообразования, являющимися следствием стационарности исследуемого функционала. Краткий обзор работ в этом направлении приведён в статьях [3–5].

Целью настоящей работы является исследование форм консолей на основе вариационного принципа Кастильяно при использовании двойственности постановки задач на условный экстремум с интегральными связями и сопоставление их с традиционными формами.

Материалы и методы

Как отмечалось выше, достаточными условиями достижения глобального экстремума функционала цели является введение энергетического начала в процедуру решения изопериметрической задачи.

Целью задачи определения формы является распределение материала таким образом, чтобы был достигнут глобальный минимум потенциальной энергии деформации J при переменных напряжениях $\vec{\sigma}$, параметрах формы ψ_c и введённых ограничениях. В этом случае функционал свободной вариационной задачи имеет вид [1]:

$$J_1 = J\left(\vec{\sigma}, \overrightarrow{\psi_c}\right) + \mu_1[V(\psi_c) - V_0], \tag{1}$$

где V_0 – заданный объём;

μ_1 – множитель Лагранжа, имеющий постоянное значение в изопериметрической задаче.

В то же время можно задать величину потенциальной энергии деформации J_0 и определить форму из условия, чтобы функционал объёма $V(\psi_c)$ имел стационарное значение. Тогда функционал свободной вариационной задачи получает вид:

$$V_1 = V\left(\vec{\psi}_c\right) + \mu_2[J(\vec{\sigma}, \vec{\psi}_c) - J_0]. \tag{2}$$

В связи с двойственностью постановки задачи следует соотношение $\mu_2 = 1/\mu_1$. Таким образом,

$$V_1 = \mu_2[J(\vec{\sigma}, \vec{\psi}_c) - J_0 + \mu_1 V\left(\vec{\psi}_c\right)], \tag{3}$$

что по существу приводит к предыдущей задаче. Решения двух задач совпадают с точностью до множителя μ.

Важный вывод состоит в том, что минимизация объёма материала должна строго согласовываться с общефизическим принципом стационарного действия.

В частном случае без нарушения энергетического начала и изопериметрии вводится ограничение на перемещения.

Проблема прочности решается путём подбора однородного или композиционного материала при достаточном соответствии с принятым ранее модулем упругости.

Пример 1. Консоль длиной l нагружена силой F (рис. 1). При заданных модуле продольной упругости E, прогибе конца консоли v_0 и высоте прямоугольного поперечного сечения h определить его ширину $b(x)$.

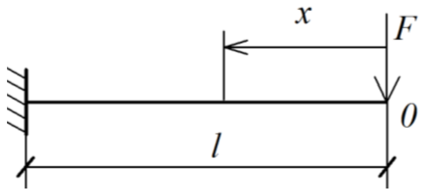

Рис. 1. Консоль

Fig. 1. The console

Потенциальную энергию деформации J поставим в зависимость от изгибающих моментов $M(x)$ и параметра $b(x)$:

$$J = \int_0^l \frac{M^2(x)dx}{2EI(x)} = \int_0^l \frac{6(Fx)^2dx}{Eb(x)h^3}. \quad (4)$$

Прогиб конца консоли $v = \partial J/\partial F$ представляется в виде:

$$v = \frac{12F}{Eh^3}\int_0^l \frac{x^2dx}{b(x)}. \quad (5)$$

При заданном прогибе конца консоли v_0 функционал объёма представим по аналогии с формулой (2):

$$V_1 = h\int_0^l b(x)dx + \mu[\frac{12F}{Eh^3}\int_0^l \frac{x^2dx}{b(x)} - v_0]. \quad (6)$$

Одним из следствий стационарности функционала (6) является условие: $\partial V_1/\partial b(x) = 0$, из которого вытекает уравнение:

$$1 - \mu\frac{12F}{Eh^4}\frac{x^2}{b^2(x)} = 0, \quad (7)$$

откуда

$$b(x) = \frac{2x}{h^2}\sqrt{\frac{3F\mu}{E}}, \quad (8)$$

то есть ширина сечения изменяется по линейному закону. Для нахождения множителя $\sqrt{\mu}$ используем второе следствие стационарности функционала (6): $\partial V_1/\partial\mu = 0$, из которого следует уравнение:

$$\frac{6F}{Eh}\sqrt{\frac{E}{3F\mu}}\int_0^l xdx - v_0 = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\sqrt{\mu} = \frac{3Fl^2}{Ehv_0}\sqrt{\frac{E}{3F}}\ . \quad (10)$$

Таким образом, выражение (8) принимает вид:

$$b(x) = \frac{6Fl^2}{Eh^2v_0}x. \quad (11)$$

Объём материала имеет выражение:

$$V = \frac{3Fl^4}{Eh^2v_0}. \quad (12)$$

Сравним этот результат с расчётом той же консоли постоянного сечения. Объём её равен bhl, а прогиб краевого сечения, как известно, равен:

$$v = \frac{Fl^3}{3EI}. \tag{13}$$

Приравнивая его к прежней величине v_0, получим уравнение:

$$\frac{4Fl^3}{3bh^3} = v_0, \tag{14}$$

откуда

$$b = \frac{4Fl^3}{Eh^3 v_0}. \tag{15}$$

Соответственно, объём

$$V_1 = \frac{4Fl^4}{Eh^2 v_0} \tag{16}$$

увеличивается на 33%.

Пример 2.Сохранив основные данные примера *1*, предположим b=const, h=h(x). Тогда

$$V_1 = b\int_0^l h(x)dx + \mu\,(v - v_0). \tag{17}$$

Аналогично формуле (5) представляем:

$$v = \frac{12F}{Eb}\int_0^l \frac{x^2dx}{h^3(x)}. \tag{18}$$

Выражение (17) принимает вид:

$$V_1 = b\int_0^l h(x)dx + \mu\,[\frac{12F}{Eb}\int_0^l \frac{x^2dx}{h^3(x)} - v_0]. \tag{19}$$

Одним из следствий стационарности функционала (19) является условие: $\partial V_1/\partial h(x) = 0$, из которого вытекает уравнение:

$$1 - \mu\frac{36F}{Eb^2}\frac{x^2}{h^4(x)} = 0, \tag{20}$$

откуда

$$h(x) = \sqrt[4]{\mu\frac{36Fx^2}{Eb^2}}. \tag{21}$$

Для определения множителя $\sqrt[4]{\mu}$ используем второе следствие стационарности функционала (19): $\partial V_1/\partial\mu = 0$, из которого следует уравнение:

$$\frac{12F}{Eb}\sqrt[4]{(\frac{Eb^2}{36F})^3}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt[4]{(\mu x^2)^3}} - v_0 = 0, \tag{22}$$

или

$$8\cdot 36^{-3/4}F^{1/4}E^{-1/4}b^{1/2}l^{3/2}\mu^{-3/4} - v_0 = 0, \tag{23}$$

откуда

$$\sqrt[4]{\mu} = \frac{2}{\sqrt{6}}F^{1/12}E^{-1/12}b^{1/6}l^{1/2}v_0^{-1/3}\ . \tag{24}$$

Таким образом, выражение (21) принимает вид:

$$h(x) = 2\sqrt{lx}\ \sqrt[3]{\frac{F}{Ebv_0}}. \tag{25}$$

Объём материала имеет выражение:

$$V = \frac{4}{3}l^2\sqrt[3]{\frac{Fb^2}{Ev_0}}. \tag{26}$$

Сравним этот результат с расчётом той же консоли постоянного сечения, имеющей прогиб краевого сечения (13). Приравнивая его прежней величине v_0, из уравнения (14) получим:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4F}{Elv_0}}\,l. \tag{27}$$

Соответственно, объём

$$V = \sqrt[3]{\frac{4Fb^2}{Ev_0}}\,l^2 \tag{28}$$

возрастает на 19%.

Пример 3. Сохранив основные данные примера *1*, предположим $h=nb(x)$, где n – некоторое число. Тогда

$$V_1 = n\int_0^l b^2(x)dx + \mu\,(v - v_0). \tag{29}$$

Аналогично формуле (5) представляем:

$$v = \frac{12F}{En^3}\int_0^l \frac{x^2 dx}{b^4(x)}. \tag{30}$$

Выражение (29) принимает вид:

$$V_1 = n\int_0^l b^2(x)dx + \mu\,[\frac{12F}{En^3}\int_0^l \frac{x^2 dx}{b^4(x)} - v_0]. \tag{31}$$

Одним из следствий стационарности функционала (31) является условие: $\partial V_1/\partial l b(x) = 0$, из которого вытекает уравнение:

$$1 - \mu\frac{24F}{En^4}\frac{x^2}{b^6(x)} = 0, \tag{32}$$

откуда

$$b(x) = \sqrt[6]{\mu\frac{24Fx^2}{En^4}}. \tag{33}$$

Для определения множителя $\sqrt[6]{\mu}$ используем второе следствие стационарности функционала (31): $\partial V_1/\partial\mu = 0$, из которого с учётом выражения (33) следует уравнение:

$$\frac{3}{5}12\cdot 24^{-2/3}n^{-1/3}F^{1/3}E^{-1/3}\mu^{-2/3}l^{5/3} = v_0, \tag{34}$$

откуда

$$\sqrt[6]{\mu} = (\frac{3}{5})^{1/12}\cdot 12^{1/4}\cdot 24^{-1/6}F^{1/12}E^{-1/12}n^{-1/12}l^{5/12}v_0^{-1/4}. \tag{35}$$

Таким образом, выражение (33) принимает вид:

$$b(x) = (\frac{3}{5})^{1/4}\cdot 12^{1/4}F^{1/4}E^{-1/4}n^{-3/4}l^{5/12}v_0^{-1/4}x^{1/3}. \tag{36}$$

Соответственно, высота сечения имеет выражение

$$h(x) = (\frac{3}{5})^{1/4}\cdot 12^{1/4}F^{1/4}E^{-1/4}n^{1/4}l^{5/12}v_0^{-1/4}x^{1/3}. \tag{37}$$

Сравнение объёма материала полученной консоли с объёмом аналогичной конструкции постоянного сечения можно вести лишь при конкретной величине n. На основе анализа результатов, полученных в примерах 1 и 2, можно сказать, что экономия материала будет в пределах от 19 до 33%.

Результаты и их обсуждение

Минимизация объёма материала объекта исследования строго согласована с вариационными принципами механики деформируемого твёрдого тела, проистекающими из общефизического принципа стационарного действия. При решении предложенных примеров более приемлемым оказался принцип Кастильяно, что подтвердила двойственная постановка задачи синтеза.

Для консоли, нагруженной на краю сосредоточенной силой, выгоднее менять ширину сечения (экономия материала 33%), чем его высоту (экономия 19%). При одновременном изменении ширины и высоты сечения экономия материала будет находиться в этих пределах.

Заключение

Представленный алгоритм решения задач синтеза объектов строительной механики не требует сложного математического обеспечения, что повышает его практическую ценность. Выход за рамки принятой в работе линейно-упругой модели может составить дальнейшее направление исследований в данной области.

Благодарности

Автор выражает признательность доктору технических наук профессору Александру Гавриловичу Юрьеву за советы в ходе работы над статьёй.

ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

Автор подтверждает ответственность за следующее: разработка концепции и дизайна исследования; сбор данных; анализ и интерпретация результатов; подготовка и редактирование текста.

The author confirms responsibility for the following: study conception and design, data collection, analysis and interpretation of results, and manuscript preparation.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | CONFLICT OF INTEREST

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Юрьев А.Г. Вариационные принципы строительной механики. Белгород: Изд-во БелГТАСМ, 2002. 90 с.
2. Тамразян А.Г., Алексейцев А.В. Современные методы оптимизации конструктивных решений для несущих систем зданий и сооружений // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 1. С. 12–30.
3. Юрьев А.Г., Панченко Л.А., Зинькова В.А. Структурный синтез стержневых систем // Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова. 2022. № 10. С. 34–40.
4. Сысоева В.В., Чедрик В.В. Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. 42. Вып. 2. С. 1–12.
5. Ширалиев С.Д., Боинская А.А., Мищенко А.В. Исследование критериев рациональности многопролетных балок // Жилищное хозяйство и коммунальная инфраструктура. 2020. № 1. С. 9–14.

REFERENCES

1. Yuriev A.G. Variational principles of structural mechanics. Belgorod, Publishing house of BelGTASM, 2002. 90 p. (In Russ.).
2. Tamrazjan A.G., Aleksejtsev A.V. Modern optimization methods of constructive solutions for supporting systems of buildings and structures. *Bulletin of MSBU*, 2020, vol. 15, no. 1, pp. 12–30. DOI: https://doi.org/ 10.22227/1997-0935.2020.1.12-30
3. Yuriev A.G., Panchenko L.A., Zinkova V.A. Structural design of pivotal systems. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*, 2022, no. 10, pp. 34–40. DOI: https://doi.org/10.34031/2071-7318-2022-7-10-34-40
4. Sysoeva V.V., Chedrik V.V. Topology optimizathion algorithms of force construuctios. *Scientific Notes of CAGI*, 2011, vol. 42, no. 2, pp. 1–12. (In Russ.).
5. Shiraliev S.D., Boinskaya A.A., Mishchenko A.V. Investigation of the rationality criteria of multispan beams. *Housing Economy and Municipal Infrastructure*, 2020, no. 1, pp. 9–14. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Зинькова Виктория Анатольевна – кандидат технических наук, доцент, Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова (Белгород, Российская Федерация)

✉ vikzinkova@mail.ru

Victoria A. Zinkova, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov (Belgorod, Russian Federation)

Статья поступила в редакцию / Received: 22.07.2024.
Доработана после рецензирования / Revised: 09.12.2024.
Принята к публикации / Accepted: 09.12.2024.