

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.24866/2227-6858/2024-3/3-10>

Математическая модель определения коэффициента демпфирования для конструкционных материалов

Мин Ко Ко[✉], Николай Алексеевич Тарануха, Олег Евгеньевич Сысоев

Комсомольский-на-Амуре государственный университет,

Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

✉ minkoko19@yandex.ru

Аннотация. В настоящее время при проектировании машин, механизмов и строительных конструкций в большинстве случаев не учитываются эффекты возникновения резонанса конструкций при совпадении собственных и вынужденных колебаний механических систем. На эти эффекты сильное влияние оказывают демпфирующие свойства конструкционных материалов. В данной статье предложена математическая модель определения демпфирующих свойств материала колеблющейся механической системы с учетом внутреннего сопротивления материала. Главной сложностью является вычленение демпфирующих свойств материала из общих демпфирующих характеристик колеблющейся системы (внешняя среда, закрепление, взаимодействие частей системы друг с другом и т.п.). Наиболее явно демпфирующие характеристики материалов проявляются при исследовании свободных колебаний балки с одной степенью свободы (с учетом внутреннего сопротивления). Предложенная математическая модель позволяет достаточно просто реализовать конкретные численные решения, также хорошо коррелирует с результатами других исследований, уточняя их результаты. Отличие предложенной в данной статье математической модели от существующих решений заключается в том, что производится корректный учет внутреннего сопротивления материала колеблющейся системы.

Ключевые слова: демпфирующие свойства, внутреннее сопротивление, колебания, коэффициент демпфирования, математическая модель

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта министерства образования и науки Хабаровского края (проект № 95с/2024 от 27.06.2024).

Для цитирования: Мин Ко Ко, Тарануха Н.А., Сысоев О.Е. Математическая модель определения коэффициента демпфирования для конструкционных материалов // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 3(60). С. 3–10.

MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS

Original article

A mathematical model for determining the damping coefficient for structural materials

Min Ko Ko[✉], Nikolay A. Taranukha, Oleg E. Sysoev

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

✉ minkoko19@yandex.ru

Abstract. At present, the effects of resonance in the coincidence of natural and forced vibrations of mechanical systems are not taken into account in the design of machines, mechanisms and building structures in most cases. These effects are strongly influenced by damping properties of structural materials. In this paper we propose a mathematical model for determining the damping properties of the material of an oscillating mechanical system, taking into account the (internal resistance) damping properties of the material. The main difficulty of this problem is the separation of the damping properties of the material from the general damping

characteristics of the oscillating system (external environment, fixation, interaction of parts of the system with each other, etc.). The most obvious damping characteristics of materials are shown on the example of vibrations and their damping in the study of free vibrations of a beam with one degree of freedom (taking into account internal resistance). The proposed mathematical model allows to realise specific numerical solutions quite simply, and it also correlates well with the results of other studies, clarifying their results. The difference between the mathematical model proposed in this paper and the existing solutions is that the internal resistance of the oscillating system material is correctly taken into account.

Keywords: damping properties, internal resistance, vibrations, damping coefficient, mechanical system

Funding: the research was supported by a grant of the Ministry of Education and Science of Khabarovsk Krai (project no. 95c/2024 from 27.06.2024).

For citation: Min Ko Ko, Taranukha N.A., Sysoev O.E. A mathematical model for determining the damping coefficient for structural materials. *FEFU: School of Engineering Bulletin*, 2024, no. 3(60), pp. 3–10. (In Russ.).

Введение

Многочисленные аварии, произошедшие из-за совпадения собственных и вынужденных колебаний конструкций и механических систем, часто приводят к техногенным катастрофам: Tacoma Narrows Bridge Collapse (1940) – подвесной мост в штате Вашингтон рухнул из-за резонансных колебаний, вызванных ветром; в турбине атомной электростанции в Сан-Онофре (2012) вибрация парогенераторов вызвала их износ и разрушение; в двигателе ракеты "Ariane 5" (1996) произошел программный сбой и вызвал резонансные вибрации, что привело к его разрушению; авария на Амурском газоперерабатывающем заводе (2021) – вибрация оборудования привела к повреждению трубопроводов и утечке газа; катастрофа на нефтегазодобывающей платформе "Deerwater Horizon" (2010) – вибрация в буровой колонне способствовала разрушению оборудования и последующему взрыву.

Приведенные примеры подчеркивают необходимость учитывать демпфирующие свойства материалов в инженерных конструкциях для предотвращения разрушений и аварий.

Проблема определения амплитудно-частотных характеристик конструкций и объектов, колеблющихся в жидкостях, является актуальной, так как с ней приходится сталкиваться при проектировании, эксплуатации и оценке динамической прочности всех современных машиностроительных объектов океанотехники. Самым трудным и неопределенным элементом при выполнении практических расчетов является определение достоверных демпфирующих характеристик реальных конструкционных материалов [8].

Среди основных параметров конструкционных материалов, определяющих их пригодность для различных элементов конструкций, важное значение имеет их демпфирующая способность, позволяющая материалам поглощать энергию колебаний при циклическом деформировании. Рост основных параметров современных машин – скорости, температуры, давления – подчеркивает важность учета демпфирующих свойств материалов и необходимость проведения более точных расчетов динамической прочности элементов конструкций и машин, которые могут попадать в резонанс в процессе эксплуатации [2, 5, 11].

При увеличении размера, скорости и мощности двигателей на морских судах возрастает вибрация конструкций, которая может привести к усталостному разрушению отдельных элементов конструкции или к сбоям в работе приборов, механизмов и оборудования на судне [9]. Один из ключевых аспектов борьбы с вредными последствиями вибрации и усталости — учет демпфирующих свойств конструкционных материалов на этапе проектирования. Демпфирование способствует затуханию вибрации, что необходимо для определения частоты резонанса и предотвращения появления вибрационных трещин в конструкционных материалах [8, 9, 13].

Оценка и учет влияния демпфирующих характеристик судовых и других сложных машиностроительных конструкций в настоящее время слабо изучена, поэтому она требует дополнительных исследований и создания более точных математических моделей.

Целью исследования является разработка методики определения демпфирующих коэффициентов для различных конструкционных материалов.

Материалы и методы исследования

Математическая модель рассматриваемой колеблющей системы с учетом внутреннего сопротивления

Для рассматриваемой колеблющейся системы консольной балки с массой на конце теоретическое решение известно [1]. Но оно не учитывает внутреннего сопротивления материала колеблющейся балки. Рассмотрим систему свободных колебаний консольной балки с массой, с учетом затухания свободных колебаний (рис. 1,2).

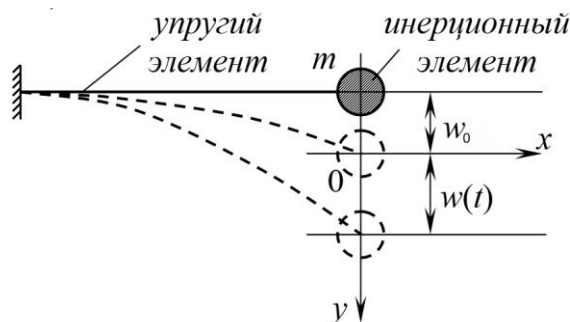


Рис. 1. Свободные колебания консольной балки

Fig. 1. Free vibrations of a cantilever beam

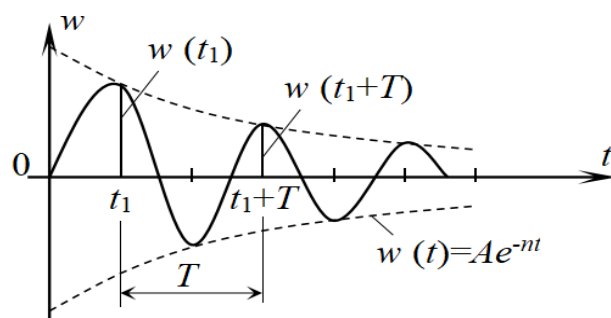


Рис. 2. График затухания свободных колебаний

Fig. 2. A graph of the damping of free vibrations

Движение (колебание) рассматриваемой системы (балка с массой на конце) описывается дифференциальным уравнением [7]

$$m\ddot{w}(x_1t) + \beta\dot{w}(x_1t) + cw(x_1t) = 0, \tag{1}$$

где $w(x_1t)$ – перемещения колеблющейся балки.

Разделив все слагаемые на компонент инерции m (концевая масса), получим

$$\ddot{w}(x_1t) + \frac{\beta}{m}\dot{w}(x_1t) + \frac{c}{m}w(x_1t) = 0. \tag{2}$$

Введем обозначения:

$$2n = \frac{\beta}{m} \text{ или } n = \frac{1}{2} \frac{\beta}{m}, \tag{3}$$

$$\lambda^2 = \frac{c}{m}, \tag{4}$$

где n – коэффициент затухания;
 c – коэффициент жесткости.
 β – коэффициент демпфирования материала;
 λ – циклическая частота свободных колебаний без учета сопротивления.

Общее решение дифференциального уравнения движения (1) рассматриваемой системы может быть получено с учетом подстановки Эйлера:

$$w(x_1 t) = D_1 e^{st}. \tag{5}$$

В этом случае, когда порядок уравнения равен двум (есть вторая производная), общее решение можно записать в виде:

$$w(x_1 t) = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}, \tag{6}$$

где D_1 и D_2 – постоянные интегрирования, а

s_1 и s_2 – корни характеристического уравнения, которое может быть получено путем подстановки формы решения (6) в дифференциальное уравнение (2).

В этом случае получим решения:

$$s_1 = -n + \sqrt{n^2 - \lambda^2}; s_2 = -n - \sqrt{n^2 - \lambda^2}. \tag{7}$$

Подставим (7) в уравнение (6), тогда общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения (2) примет вид:

$$w(x_1 t) = D_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \lambda^2})t} + D_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \lambda^2})t}. \tag{8}$$

В процессе всех этих преобразований потребуется применить краевые условия, которые тоже являются частью формулируемой математической модели задачи.

Граничные условия:

$w(x_1 t)|_{npu...x=0} = 0$, просадка в жесткой заделке (при $x = 0$) отсутствует;

$\frac{\partial w}{\partial x}(x_1 t)|_{npu...x=0} = 0$, угол поворота сечения балки в жесткой заделке (при $x = 0$) отсутствует.

} (9)

Начальные условия:

$\frac{\partial w}{\partial t}|_{npu...t=0} = w_0$, начальное отклонение в начальный момент времени

на свободном конце известно и задано $= w_0$;

$\frac{\partial w}{\partial t}|_{npu...t=\infty} = 0$, свободное колебание балки при $t \rightarrow \infty$ при наличии сопротивления полностью затухает (скорость $= 0$).

} (10)

Появление здесь коэффициента затухания n и коэффициента демпфирования β связано с введением в математическую модель диссипативной функции Рэлея [6, 13, 14]:

$$R = \frac{1}{2} \beta v^2. \tag{11}$$

Надо отметить, что входящие в математическую модель коэффициент затухания n и коэффициент внутреннего сопротивления (коэффициент демпфирования) β определяются экспериментально. Появление коэффициента затухания n и коэффициента демпфирования β связано с введением в математическую модель диссипативной формулы (11) Рэлеем в его классическом труде «Теория звука» [6, 13, 14].

$$\zeta = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2}. \tag{12}$$

Альфа-демппирование (пропорционально массе):

$$\zeta_m = \frac{\alpha}{2\omega_n}. \quad (13)$$

Бета-демпфирование (пропорционально жесткости):

$$\zeta_k = \frac{\beta\omega_n}{2}, \quad (14)$$

где α – коэффициент массы;
 β – коэффициент жесткости;
 ω_n – частота собственных колебаний конструкции;
 ζ – коэффициент демпфирования Рэлея;
 ζ_m – коэффициент демпфирования пропорционально массе;
 ζ_k – коэффициент демпфирования пропорционально жесткости.

Определим коэффициент демпфирования β материала колеблющейся системы.

Для этого рассмотрим два важных теоретических понятия: декремент D затухания и период колебаний T , которые необходимы для определения коэффициента демпфирования β исследуемого материала.

Известно, что отношение двух последовательных амплитуд затухающих колебаний остается почти постоянным и называется декрементом затухания D :

$$D = \frac{w(t_1)}{w(t_1+T)}. \quad (15)$$

При этом амплитуды соседних колебаний при $t = t_1$ и $t = t_1 + T$ можно записать в следующем виде:

$$w(t_1) = Ae^{-nt_1}, \quad (16)$$

$$w(t_1 + T) = Ae^{-n(t_1+T)}, \quad (17)$$

где A – постоянная интегрирования;
 T – период колебания, который определяется условно как «время между двумя последовательными вершинами» графика затухающих колебаний.

Эти амплитуды могут быть экспериментально определены с помощью используемого в исследовании виброметра.

Подставим амплитуды (16) и (17) в формуле декремента получим:

$$D = \frac{Ae^{-nt_1}}{Ae^{-n(t_1+T)}} = e^{nT}. \quad (18)$$

Здесь произвольные постоянные A попадают под сокращение.

Таким образом, коэффициент затухания n определяется по формуле (3).

Из формулы (18) следует, что

$$\ln D = nT \text{ или } n = \frac{\ln D}{T}. \quad (19)$$

Подставим (3) в формулу (19):

$$\frac{1}{2} \frac{\beta}{m} = \frac{\ln D}{T}. \quad (20)$$

Отсюда получим следующую формулу для определения коэффициента демпфирования:

$$\beta = 2m \frac{\ln D_{\text{экс}}}{T_{\text{экс}}}. \quad (21)$$

Непосредственное определение коэффициента β происходит следующим образом:

- экспериментально с помощью виброметра определим две соседние амплитуды, указанные в формуле (12) и период колебания T ;
- затем получим экспериментальные значения декремента $D_{\text{экс}}$ и период колебания $T_{\text{экс}}$.

Тогда:

$$\beta_{\text{экс}} = 2m_{\text{экс}} \frac{\ln D_{\text{экс}}}{T_{\text{экс}}} = 2m_{\text{экс}} \cdot n_{\text{экс}}. \tag{19}$$

При этом масса $m_{\text{экс}}$ с учетом концевго груза $m_{\text{гру}}$ определяется по формуле:

$$m_{\text{экс}} = m_{\text{бал}} + m_{\text{гру}}, \tag{20}$$

где $m_{\text{бал}}$ – масса самой балки исследуемого материала.

Результаты исследования

Разработанная математическая модель учитывает внутреннее сопротивление исследуемого материала и позволяет получить корректное значение коэффициента демпфирования β конструкционного материала в воздухе и жидкости численным методом.

Для сравнения эффективности полученной математической модели по отношению к существующим (демпфирование Рэля, α -демпфирование и β -демпфирование), был приведен численный эксперимент для стали Ст3сп.

На графике (рис. 3) видно, что линия демпфирования предложенной модели (2) показывает следующее: с ростом частоты колебания механической системы коэффициент демпфирования возрастает быстрее, чем в других моделях. На графике также показано, что скорость рассеивания энергии (коэффициент демпфирования) выше в предложенной модели, чем в существующих. Это объясняется как раз учетом внутреннего сопротивления конструкционного материала и ускоренному затуханию вынужденных колебаний.

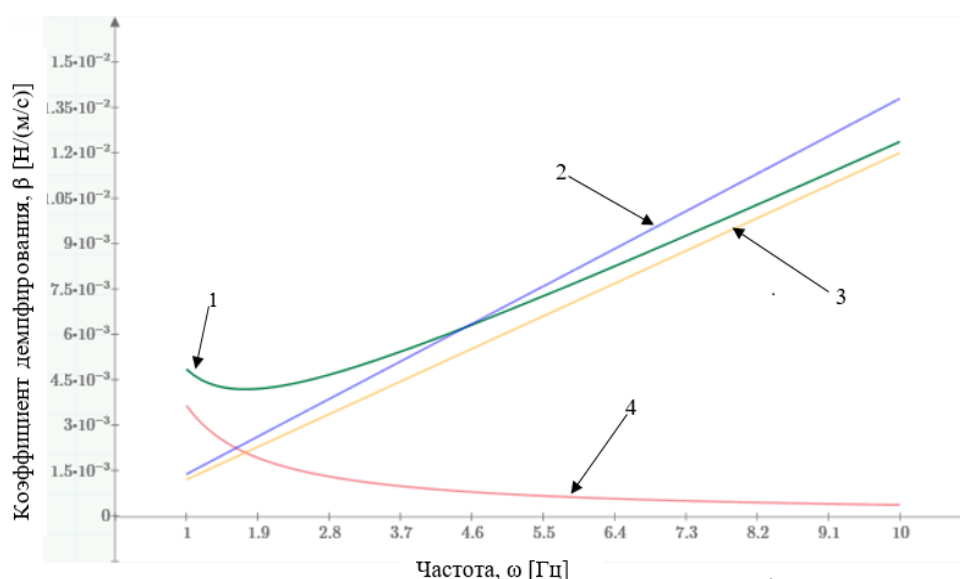


Рис. 3. Зависимость коэффициента демпфирования от частоты колебаний механической системы при использовании различных математических моделей:

- 1 – кривая демпфирования Рэля; 2 – линия демпфирования предложенного метода;**
- 3 – бета-демпфирование; 4 – альфа-демпфирование**

Fig. 3. Dependence of the damping coefficient on the frequency of oscillation of a mechanical system using different mathematical models: 1 – Rayleigh damping; 2 – damping coefficient of the proposed method; 3 – beta damping; 4 – alpha damping

Заключение

Правильное определение и учет демпфирующих свойств (внутреннего сопротивления) конструкционных материалов является одним из важнейших разделов механики деформируемого тела, особенно в области возникновения резонанса для объектов, колеблющихся в воздушной и жидкой окружающей среде. Это касается динамических задач вибрации и усталос-

ти конструкций и их элементов. Результаты исследований предоставляют возможность построения математической модели и **получения более простой и точной формулы для определения демпфирующих свойств** (внутреннего сопротивления) **материала** колеблющейся механической системы.

Дальнейшие исследования с использованием предложенной модели дают возможность определения динамических характеристик многослойных композиционных материалов и определять влияние композиционных покрытий, широко используемых в последнее время в кораблестроении и авиастроении, на демпфирующие свойства несущих конструкций.

ВКЛАД АВТОРОВ | CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

Н.А. Тарануха – разработка концепции и дизайна исследования; О.Е. Сысоев – сбор данных; Мин Ко Ко – анализ и интерпретация результатов; подготовка и редактирование текста. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи

N.A. Taranukha – study conception and design; O.E. Sysoev – data collection; Min Ko Ko – analysis and interpretation of results; draft manuscript preparation. All authors reviewed the results and approved the final version of the manuscript.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ | CONFLICT OF INTERESTS

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Антоненко С.В. Вибрация судов. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2007. 148 с.
2. Водопьянов В.И., Белов А.А. Исследование демпфирующих свойств материалов. Волгоград: ВолгГТУ, 2001. 12 с.
3. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели свободных колебаний пластины с жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177656>
4. Иванкова Е.П. Моделирование и оптимизация выбора свойств материалов и структуры многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 3(51). С. 85–89. <https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-85>
5. Прокудин О.А., Рабинский Л.Н., Чан Куэт Тханг. Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня // Труды МАИ. 2023. № 120. <https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06>
6. Сидоров В.Н., Бадина Е.С., Климушкин Д.О. Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 6. С. 960–970. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.6.960-970>
7. Тарануха Н.А., Журбин О.В. Математическое моделирование колебаний сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления. Владивосток: Дальнаука, 2008. 253 с.
8. Тарануха Н.А., Мин Ко Ко. Эффект предельного перехода и формулирование на его основе метода для определения и систематизации коэффициентов демпфирования различных конструктивных материалов // Морской вестник. 2023. № 85. С. 42–46.
9. Тарануха Н.А., Мин Ко Ко. Экспериментальное исследование колебаний стальной балки с целью определения коэффициентов демпфирования материала на основе идеи предельного перехода с помощью лазерного виброметра // Морские интеллектуальные технологии. 2021. Т. 2. № 2(52). С. 117–122.
10. Феоктистов С.И. Определение растягивающих усилий вдоль образующей пуансона с учётом трения при изгибе с растяжением // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 1(49). С. 76–82.
11. Чан Куэт Тханг. Идентификация динамических свойств монослоя в металлополимерном слоистом композите // Труды МАИ. № 134. 2024. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178456>
12. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. Москва: Высшая школа, 1966. 255 с.
13. Smirnov V., Smolyakov Yu. Experimental method for structural concrete damping properties evaluation // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. Vol. 4(18). P. 14–22. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-14-22>

14. Strett J. W. (Lord Rayleigh) The Theory of Sound. Vol. I. London: Macmillan Press, 1945. 503 p.

REFERENCES

1. Antonenko S.V. Vibration of ships. Vladivostok, DVG TU Publ., 2007, 148 p. (In Russ.).
2. Vodopyanov V.I., Belov A.A. Research of damping properties of materials. Volgograd, VolgGTU Publ., 2001, 12 p. (In Russ.).
3. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. Experimental verification of the mathematical model of free vibrations of a plate with rigidly pinched edges. *Proceedings of MAI*, 2023, no. 133. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177656>
4. Ivankova E.P. Modelling and optimization of the choice of material properties and structure of multilayer shell moulds on investment models. *Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University*, 2021, no. 3(51), pp. 85–89. (In Russ.). <https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-85>
5. Prokudin O.A., Rabinsky L.N., Chan Kuet Thang. Determination of dynamic characteristics of metal-polymer layered rod. *Proceedings of MAI*, 2021, no. 120. (In Russ.). <https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06>
6. Sidorov V.N., Badina E.S., Klimushkin D.O. Modification of the Rayleigh dissipation function for numerical simulation of internal damping in rod structures. *Bulletin of the MGSU*, 2024, no. 6(19), pp. 960–970. (In Russ.). <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.6.960-970>
7. Taranukha N.A., Zhurbin O.V. Mathematical modelling of oscillations of complex wall-rails. Hydroelastic setting taking into account the resistance. Vladivostok, Dalnauka Publ., 2008, 253 p.
8. Taranukha N.A., Min Ko Ko. The effect of the limit transition and the formulation on its basis of a method for determining and systematizing the damping coefficients of various structural materials. *Morskoy Vestnik*, 2023, no. 85, pp. 42–46. (In Russ.).
9. Taranukha N.A., Min Ko Ko. Experimental study of vibrations of a steel beam in order to determine the damping coefficients of the material based on the idea of the limit transition using a laser vibrometer. *Marine Intelligent Technologies*, 2021, no. 52, pp. 117–122. (In Russ.).
10. Feoktistov S.I. Determination of the tensile forces along the punch forming with account of the friction at the tensile bending. *Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University*, 2021, no. 1(49), pp. 76–82. (In Russ.).
11. Chan Kuet Thang. Identification of dynamic properties of monolayer in metal-polymer layered composite. *Proceedings of the MAI*, 2024, no. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178456>
12. Yablonsky A.A., Noreiko S.S. Vibration Theory Course. Moscow, Higher School Publ., 1966. 255 p. (In Russ.).
13. Smirnov V., Smolyakov Yu. Experimental method for structural concrete damping properties evaluation. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2022 no. 4(18), pp. 14–22. (In Russ.). <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-14-22>
14. Strett J. W. (Lord Rayleigh) The Theory of Sound. Vol. I. London, Macmillan Press, 1945, 503 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ | INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Мин Ко Ко – аспирант кафедры «Кораблестроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет (Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация)

✉ minkoko@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8158-2211>

Мин Ко Ко, Postgraduate Student of the Department of Shipbuilding of Komsomolsk-na-Amure State University (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)

Тарануха Николай Алексеевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет (Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация)

✉ nikoltar@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8030-0657>

Nikolay A. Taranukha, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Chief Researcher of Komsomolsk-na-Amure State University (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)

Сысоев Олег Евгеньевич – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительство и архитектура», Комсомольский-на-Амуре государственный университет (Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация)

✉ fks@knastu.ru

Oleg E. Sysoev, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Construction and Architecture of Komsomolsk-na-Amure State University (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)

Статья поступила в редакцию / Received: 13.06.2024.

Доработана после рецензирования / Revised: 06.09.2024.

Принята к публикации / Accepted: 20.09.2024.