Математическое моделирование инвестиций в человеческий капитал и эффект дивергенции

Талгат Кильматов

Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток, Россия

Информация о статье
Поступила в редакцию:
01.12.2022
Принята к опубликованию:
28.12.2022

УДК 334.01

JEL P51, C02

Аннотация
Предлагается простая динамическая модель для анализа численности человеческого капитала в зависимости от удельных затрат на его формирование. В приближении линеаризованной модели представлено аналитическое стационарное решение. Анализ устойчивости стационарного решения показывает режим неустойчивости в случае ускоренного научно-технического прогресса и ускоренного возрастания эффективности человеческого капитала. Ожидаемый результат — дивергенция стран по этому параметру. Увеличение расслоения между технологическими странами с ускоренным развитием человеческого капитала и ведомыми бедными странами.

Ключевые слова:
динамическая модель, человеческий капитал, затраты, дивергенция стран.

Mathematical Modeling of Investments in Human Capital and the Divergence Effect

Talgat R. Kilmatov

Abstract
A simple dynamic model is proposed for analyzing the number of human capital depending on the unit costs of its formation. An analytical stationary solution is presented in the approximation of the linearized model. The analysis of the stability of a stationary solution shows the instability regime in the case of accelerated scientific and technological progress and the efficiency of human capital increases rapidly. The expected result is the divergence of countries in this parameter. Human capital is growing rapidly in rich countries, the income gap with poor countries is increasing.

Keywords:
dynamic model, human capital, costs, divergence of countries.

DOI: https://dx.doi.org/10.24866/2311-2271/2022-3/90-95

Введение

Усложнение социально-экономической структуры общества, информатизация, роботизация, цифровизация, научные разработки, сложные технологии, ускоренный научно-технический прогресс выдвинули на современном уровне в качестве фактора экономического роста параметр — человеческий капитал (Human capital). По сути — это совокупность образования, навыков, творческих способностей индивидуума для эффективного функционирования и развития общества. В последние десятилетия это отразилось в математических моделях макроэкономического роста. Если в первых классических моделях динамического роста (Solow, Нобелевская премия 1989 г.) [8] ведущими ресурсами были труд и капитал, то дальнейшее развитие этого направления включало ресурс — человеческий капитал. В частности — динамическая модель эндогенного экономического роста [6, 7] (Romer, Нобелевская премия 2007 г.), где параметр — человеческий капитал H (ЧК) входит как один из аргументов производственной функции. Ресурс H в подобных моделях является ведущим аргументом производственной функции, здесь главное внимание уделяется нахождению устойчивой траектории роста по выпуску при разумном распределении ресурсов — капитала, труда и человеческого капитала (ЧК).

Ниже в данной работе строится математическая модель формирования ЧК как функции вкладываемых ресурсов в развитие индивида. Этот процесс рассматривается как экономическая категория, где численность ЧК H является функцией вкладываемых затрат P на каждого индивида. Модель строится в рамках неоклассической экономической теории.

Динамическая модель формирования численности человеческого капитала

Построим математическую модель формирования $H = H(t, P)$ — численность ресурса человеческий капитал как функцию времени t и вложенных ресурсов $P = P(t, H)$, которые в свою очередь зависят от численности ЧК. Здесь P — агрегированные удельные затраты на этот процесс (воспитание, медицину, образование и т.д.), т.е. на одного индивида. Общие затраты соответственно равны PH. Исходя из классического рыночного подхода [1, 3, 4] считаем, что затраты должны окупаться. Если обозначить D — доход от использования ЧК, тогда из соображений оптимального поведения системы [1, 4] прибыль стремится к максимуму, т.е.

$$D - PH \to \max,$$

откуда следует необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial D}{\partial H} - P = 0.$$

Здесь предельная доходность по численности ЧК равна удельным затратам.

Для построения модели сделаем следующие простые предположения. Считаем, что удельные затраты на формирование Н зависят от дефицитности этого ресурса. Если объём ресурса ЧК является дефицитным, то система увеличивает затраты на подготовку этого ресурса, при обратной ситуации затраты снижаются. Обозначим $\overline{\mathrm{H}}$ - равновесная численность ЧК для текущего момента времени. Также полагаем, что происходит самонастройка системы по численности и удельным затратам на формирование ЧМ. В результате имеем следующую математическую динамическую модель

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}} = \alpha\left(\overline{\mathrm{H}} - \mathrm{H}\right), \\ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{t}} = \beta\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{H}} - \mathrm{P}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты α, β — положительные, они характеризуют уровень временной инерции при отклонении соответствующих переменных от своего стационарного состояния.

Представленная модель (1) соответствует классическим дифференциальным моделям типа Эванса, Самуэльсона (обзор в [3]), в которых рыночный механизм формируется балансом спроса и предложения. Избыток или недостаток ресурса автоматически компенсируется вариацией цен на ресурс и действует в направлении равновесия системы. Второе уравнение показывает, что в стационарном состоянии предельная доходность равна удельным затратам. Из структуры правых частей уравнений понятно, что скорость реакции на отклонение системы от стационарного состояния растёт при увеличении коэффициентов α, β, которые в модели задаются экзогенно.

Линеаризация модели. Стационарное состояние

Проведём линеаризацию системы (1) при следующих классических экономических предположениях. Для зависимости равновесной численности ЧК от удельных затрат будем исходить из следующих рассуждений [1, 3]. Чем дороже затраты на формирование ЧК, тем меньшее число индивидов может позволить себе войти в “элитный слой”, поскольку здесь имеют преимущество страны и семьи с более высоким доходом на душу населения. В соответствии с изложенными соображениями аналитически это выражается так $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}} = -\mathrm{h} < 0$. Разлагая в ряд, для равновесной численности получим

$$\overline{\mathrm{H}} \approx \mathrm{H}_0 + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{H}_0 - \mathrm{hP}. \tag{2}$$

Ниже для простоты считаем параметр $\mathrm{h} > 0$, который имеет смысл предельной численности Н от удельных затрат Р, постоянным.

Первый член разложения в ряд H_0 по экономической сути имеет смысл объёма ЧК при всеобщей бесплатной доступности к ресурсу.

Рассмотрим зависимость дохода D от численности ЧК. Эта функция возрастающая, поскольку чем больше ресурса H, тем значительней доход, т.е. $\frac{\partial D}{\partial \mathrm{H}} = \mathrm{a} > 0$. Одновременно в модели эта функция входит как производная, поэтому её разложение производится с учётом квадратичного члена,

$$\mathrm{D} \approx \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{H}}\mathrm{H} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{H}^2}\mathrm{H}^2 = \mathrm{aH} + \frac{1}{2}\mathrm{bH}^2. \quad (3)$$

Из экономических соображений ясно, что D = 0 при H = 0, как следует из уравнения (3). Здесь обозначено $\frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{H}^2} = \frac{1}{2}\mathrm{b}$. В дальнейшем в модели параметры a, b считаем постоянными. Важно обсудить знак b. Этот параметр характеризует выпуклость функции. В классической экономике предполагается закон убывающей полезности ресурса, поэтому в этом случае $b < 0$. В то же время, современный научно-технический прогресс развивается ускоренно, в моделях часто принимается в виде экспоненциальной функции. В этом случае выпуклость функции вниз. Отсюда следует, что доходность от ЧК также растёт ускоренно, тогда $b > 0$. Оба сценария рассматриваются ниже.

Подставляя разложения (2), (3) в систему (1), получим следующую линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha(-hP - H + H_0), \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \beta(-P + bH + a). \end{cases} \quad (4)$$

Следуя классическому экономическому анализу, из (4) получаем стационарное решение системы в следующем виде

$$\begin{cases} \mathrm{P_s} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{bH_0}}{1 + \mathrm{bh}}, \\ \mathrm{H_s} = \frac{\mathrm{H_0} - \mathrm{ab}}{1 + \mathrm{bh}}. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что стационарное решение системы соответствует оптимальному с точки зрения получения максимальной прибыли по ресурсу H и удельных затрат P.

Устойчивость стационарного состояния. Дивергенция развитых и бедных стран по численности человеческого капитала

Проведём анализ устойчивости стационарного решения (5). Не вдаваясь в математические подробности, в соответствии с теорией [2, 5] стационарное решение (5) устойчиво, если собственные значения λ_i, удовлетворяющие уравнению

$$\begin{vmatrix} -\alpha h - \lambda & -\alpha \\ -\beta & \beta b - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

Имеют отрицательные реальные части, т.е. $Re(\lambda_i) < 0$.
Решение этого уравнения имеет вид

$$2\lambda_i = (\beta b - \alpha h) \pm \sqrt{(\beta b - \alpha h)^2 + 4\alpha\beta(1 + bh)}.$$

Отсюда необходимое условие устойчивости принимает вид

$$Re(\lambda) = \beta b - \alpha h < 0. \qquad (7)$$

Проведём интерпретацию этого неравенства с точки зрения экономики. Из неравенства (7) следует, что в рамках классической экономики, когда выполняется закон убывающей полезности ресурса и $b < 0$, неравенство (7) выполняется всегда и стационарное решение устойчиво.

Ситуация меняется при ускоренном научно-техническом прогрессе, тогда в модели может выполняться неравенство $b > 0$. Это означает, что этот параметр количественно характеризует темпы ускорения научно-технического прогресса и, как следствие, акселерацию на доходность за счет технологий.

Из (7) видно, при прочих равных условиях для устойчивости предпочтительнее, чтобы первый член правой части был как можно меньше, второй член как можно больше. Отсюда следует, что для выполнения неравенства желательно, чтобы временная реакция на изменение стоимости подготовки ЧК была быстрой, т.е. параметр α предпочтительно больше, чем параметр β. Здесь β характеризует временную реакцию системы на изменение численности ЧК. Из неравенства также видно, что рост параметра h, характеризующий скорость убывания функции $H(P)$ и равный модулю предельной численности ЧК от удельных затрат, дает тенденцию к устойчивости.

В итоге из неравенства (7) следует вывод, что если научно-технический прогресс значительный, его ускорение выше порогового уровня, который равен $\left|\frac{\partial^2 D}{\partial H^2}\right|_{pr} = \alpha/\beta\left|\frac{\partial H}{\partial P}\right| = (\alpha/\beta)h$, тогда стационарное решение теряет устойчивость.

Таким образом, вследствие ускоренного научно–технического прогресса богатые страны будут увеличивать численность ЧК, что порождает ещё больший экономический рост. Увеличение выпуска позволяет наращивать ЧК и становиться ещё богаче. Подобный процесс может породить эффект дивергенции между странами, которые участвуют и которые не участвуют в наращивании ЧК. Богатые в перспективе ещё богаче и разница между богатыми и бедными странами возрастает.

Заключение

Построена простая динамическая модель численности человеческого капитала в зависимости от удельных затрат на его производство. Построено стационарное решение в приближении линеаризованной модели. Проведён анализ устойчивости. Модельный анализ показывает, что в случае ускоренного научно-технического прогресса возможен эффект расслоения, дифференциации стран по признаку численности человеческого капитала. Возможен эффект процесса дивергенции стран по рассматриваемому социально-экономическому признаку. Таким образом, научно-технический прогресс может привести к еще большему расслоению стран на ведущие богатые и ведомые бедные.

Список источников

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 316 с.
4. Кильматов Т.Р. Оптимизация распределения трудовых ресурсов между регионами с разными природными потенциалами // Экономика и математические методы. 2009. № 45 (3). С. 68–71.
5. Кильматов Т.Р. Временной лаг как фактор потери устойчивости экономической системы // Экономика и математические методы. 2013. № 49 (3). С. 120–122.
6. Romer P. Human Capital and Growth: Theory and Evidence // Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Elsevier. 1989. Vol. 32. No. 1, pp. 251–286.
7. Romer P. Endogenous technological change // Journal of Political Economy. 1990. Vol. 98. No. 5, pp. 71–102.
8. Solow R.M. Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70, No. 1, pp. 65–94.

Сведения об авторах / About authors

Кильматов Талгат Рустемович, доктор физико-математических наук, профессор, департамент управления на основе данных (Data Driven Management Department) Школы экономики и менеджмента, Дальневосточный федеральный университет. 690620 Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. E-mail: *kilmatov.tr@dvfu.ru*.

Talgat R. Kilmatov, Dr. in Physics and Mathematical Sciences, Professor, Data Driven Management Department of School of Economics and Management, Far Easter Federal University. Bld. G, FEFU Campus, Vladivostok, Russia, 690620. E-mail: *kilmatov.tr@dvfu.ru.*

Адрес сайта в сети интернет: http://jem.dvfu.ru